Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 3

МАТЕМАТИКА

А. А. АБРАМОВ

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТАХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, ПОЛУЧАЕМЫХ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ПСЕВДОТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 18 VII 1951)

1°. Рассмотрим в n-мерных римановых пространствах R_n класса дифференцируемости $1+s \geqslant 3$ такие псевдотензорные* поля, что:

1) $\Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} = F_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}\left(g_{11}, \ldots, \dfrac{\partial^r g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma_1} \ldots \partial x^{\gamma_r}}, \ldots, \dfrac{\partial^s g_{nn}}{(\partial x^n)^s}\right)$, где $F_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ — аналитические функции своих аргументов (определяющих чисел метрического тензора и их производных по координатам до порядка s) для их действительных значений при положительно определенной форме $g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta$;

2) $\Omega_{[\varkappa_1 \ldots \varkappa_p]} = \Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$.

В дальнейшем ориентация p-ячеек Q_p в R_n берется внешняя, соответственно меняется определение цикла. Определим

$$\int\limits_{Q_p} \Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p} = \int\limits_{Q_p} \varepsilon \Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} \frac{\partial x^{\varkappa_1}}{\partial u^1} \ldots \frac{\partial x^{\varkappa_p}}{\partial u^p} du^1 \ldots du^p$$

($u^1, u^2, \ldots, u^p$ — координаты на Q_p), где $\varepsilon = +1$, если ориентация $(u^1, \ldots, u^p)$ и внешняя ориентация Q_p вместе дают ту же ориентацию, что и $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$; $\varepsilon = -1$ в противном случае.

Будем говорить, что $\Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ дает топологический инвариант, если $\int\limits_{C_p} \Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p}$ (C_p — цикл в R_n) не меняется при введении в R_n другого метрического тензора. Назовем $\Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ и $\overline{\Omega}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ эквивалентными, если всегда $\int\limits_{C_p} \Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p} = \int\limits_{C_p} \overline{\Omega}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p}$.

Построим для четных n поля:

$$\Phi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_n} = c\, \frac{R_{[\alpha_1\alpha_2, |\beta_1\beta_2|} \ldots R_{\alpha_{n-1}\alpha_n], \beta_{n-1}\beta_n}}{\sqrt{g}}\, \varepsilon_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_n}, \tag{1}$$

где $R_{\alpha\beta, \gamma\delta}$ — тензор кривизны, $g = \det \| g_{\alpha\beta} \|$, $\varepsilon_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_n} = \varepsilon^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_n} = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} \varkappa_1 \ldots \varkappa_n \\ 1 \ldots n \end{pmatrix}$,

---

* Т. е. $\Omega_{\varkappa'_1 \ldots \varkappa'_p} = \dfrac{\partial x^{\varkappa_1}}{\partial x^{\varkappa'_1}} \ldots \dfrac{\partial x^{\varkappa_p}}{\partial x^{\varkappa'_p}} \Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} \operatorname{sgn} \det \left\| \dfrac{\partial x^{\varkappa}}{\partial x^{\varkappa'}} \right\|$.

c — константа. Как известно, эти поля дают топологические инварианты [1].

Целью заметки является доказательство теоремы:

Теорема. *Полями* (1) *и нулевыми полями исчерпываются все с точностью до эквивалентных псевдотензорные поля, дающие топологические инварианты.*

2°. Доказательство опирается на применение следующих фактов:

1. Если определяющие числа $\Psi_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_p}$ тензорного поля Ψ суть функции определяющих чисел $g_{\alpha\beta}$, их производных по координатам до порядка s и определяющие чисел тензоров a_μ, $b_\nu, \ldots$, то они суть функции определяющих чисел $g_{\alpha\beta}$, нормальных расширений $g_{\alpha\beta,\, \gamma_1 \cdots \gamma_r}, \ldots$ до порядка s и a_μ, $b_\nu, \ldots$ Именно, $\Psi_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_p} = \Psi_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_p}\left(g_{\alpha\beta}, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}, \ldots \right.$

$\left. \ldots, \frac{\partial^s g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma_1} \ldots \partial x^{\gamma_s}}, a_\mu, b_\nu, \ldots \right) = \Psi_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_p}(g_{\alpha\beta}, 0, \ldots, g_{\alpha\beta,\, \gamma_1 \cdots \gamma_s}, \quad a_\mu, \quad b_\nu, \quad \ldots)$ ([2], стр. 106).

2. Для того чтобы тензоры в точке $g_{\alpha\beta,\, \gamma_1 \cdots \gamma_r}$, $1 \leqslant r \leqslant s$, могли быть расширениями метрического тензора, необходимо и достаточно, чтобы $g_{(\alpha\beta),\, (\gamma_1 \cdots \gamma_r)} = g_{\alpha\beta, \gamma_1 \cdots \gamma_r}$, $g_{\alpha(\beta, \gamma_1 \cdots \gamma_r)} = 0$; в частности, $g_{\alpha\beta,\, \gamma} = 0$ [3].

3. Пусть инвариант $J = J(g^{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\, \gamma\delta}, \ldots, g_{\alpha\beta,\, \gamma_1 \cdots \gamma_s}, \underset{1}{\xi}_{\varkappa_1} \cdots \underset{q}{\xi}_{\varkappa_q})$ — полином относительно $g_{\alpha\beta,\, \gamma\delta}, \ldots, g_{\alpha\beta,\, \gamma_1 \cdots \gamma_s}, \underset{1}{\xi}_{\varkappa_1}, \ldots, \underset{q}{\xi}_{\varkappa_q}$.

Тогда J — линейная комбинация мономов, которые получаются из произведений тензоров $g^{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta,\, \gamma\delta}, \ldots, g_{\alpha\beta,\, \gamma_1 \ldots \gamma_s}$, $\underset{1}{\xi}_{\varkappa_1}, \ldots, \underset{q}{\xi}_{\varkappa_q}$ полными свертываниями.

4. Составим для J по формуле с тем же скелетом $\tilde{J}$ в R_{n-1}. Если $\tilde{J} \equiv 0$, то $J = H_{[\alpha_1 \cdots \alpha_n][\beta_1 \cdots \beta_n]}\, g^{\alpha_1\beta_1} \ldots g^{\alpha_n\beta_n}$, где $H_{\gamma_1 \cdots \gamma_{2n}}$ — результат частичного свертывания.

5. Достаточно рассматривать бесконечно малые изменения $g_{\alpha\beta}$—$\delta g_{\alpha\beta}$.

3°. Следуя [4], рассмотрим в R_n семейство метрических тензоров $\overset{t}{g}_{\alpha\beta} = t g_{\alpha\beta}$, $0 < t$ — параметр, постоянный на R_n. Соответствующие величины будем помечать значком ^{t} наверху.

Очевидно, $\overset{t}{g}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{t} g^{\alpha\beta}$, $\overset{t}{g}_{\alpha\beta,\, \gamma_1 \cdots \gamma_r} = t g_{\alpha\beta,\, \gamma_1 \cdots \gamma_r}$, $\sqrt{\overset{t}{g}} = t^{n/2} \sqrt{g}$.

Как и в [4], можно показать, что достаточно рассматривать поля $\Omega_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_p}$ такие, что, кроме 1) и 2) из 1°, имеют место:

3) $\Omega_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_p}$ — полиномы относительно $g_{\alpha\beta,\, \gamma_1\gamma_2}, \ldots, g_{\alpha\beta,\, \gamma_1 \cdots \gamma_s}$;

4) $\overset{t}{\Omega}_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_p} = \Omega_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_p}$.

Составим тензор $B^{\varkappa_{p+1} \cdots \varkappa_n} = \dfrac{\Omega_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_p}\, \varepsilon^{\varkappa_1 \cdots \varkappa_n}}{p!\,(n-p)!\sqrt{g}}$. Тогда

$$\overset{t}{B}{}^{\varkappa_{p+1} \cdots \varkappa_n} = t^{-n/2} B^{\varkappa_{p+1} \cdots \varkappa_n}, \quad \Omega_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_p} = B^{\varkappa_{p+1} \cdots \varkappa_n} \sqrt{g}\, \varepsilon_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_n},$$

$$\int\limits_{C_p} \Omega_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_p} dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p} = n! \int\limits_{C_p} \sqrt{g}\, B^{[\varkappa_{p+1} \cdots \varkappa_n} dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p]},$$

$B^{\varkappa_{p+1} \cdots \varkappa_n} \underset{p+1}{\xi}_{\varkappa_{p+1}} \cdots \underset{n}{\xi}_{\varkappa_n}$ получается из произведений тензоров $g_{\alpha\beta,\, \gamma\delta}$, $g_{\alpha\beta,\, \gamma\delta\varepsilon}$, $\ldots \underset{p+1}{\xi}_{\varkappa_{p+1}}, \ldots, \underset{n}{\xi}_{\varkappa_n}$ полными свертываниями с помощью $g^{\alpha\beta}$.

Составим в R_{n+1} по формуле с тем же скелетом ${}^{*}B^{\varkappa_{p+1}\ldots\varkappa_n}$ (звездочкой будем помечать величины в R_{n+1}). Рассмотрим в R_{n+1} псевдотензорное поле ${}^{*}\Omega_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p\varkappa_{n+1}} = {}^{*}B^{\varkappa_{p+1}\ldots\varkappa_n}\,{}^{*}\sqrt{g}\,\varepsilon_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{n+1}}$.

Лемма 1. *Если $\Omega_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}$ дает топологический инвариант, не эквивалентный нулю, то ${}^{*}\Omega_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p\varkappa_{n+1}}$ не дает топологического инварианта.*

Доказательство. ${}^{*}\overset{t}{\Omega}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p\varkappa_{n+1}} = {}^{*}\overset{t}{B}{}^{\varkappa_{p+1}\ldots\varkappa_n}\,{}^{*}\sqrt{\overset{t}{g}}\,\varepsilon_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{n+1}} =$
$= t^{n/2}\,{}^{*}\Omega_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p\varkappa_{n+1}}$, $\int\limits_{C_{p+1}} {}^{*}\overset{t}{\Omega}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p\varkappa_{n+1}}dx^{\varkappa_1}\cdots dx^{\varkappa_p}dx^{\varkappa_{n+1}} = t^{n/2}\int\limits_{C_{p+1}} {}^{*}\Omega_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p\varkappa_{n+1}} \times$ $\times\, dx^{\varkappa_1}\cdots dx^{\varkappa_p}\,dx^{\varkappa_{n+1}}$, и если ${}^{*}\Omega_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p\varkappa_{n+1}}$ дает топологический инвариант, то оно эквивалентно нулю. Пусть $\int\limits_{\underset{0}{C_p}\subset \underset{0}{R_n}} \Omega_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}\,dx^{\varkappa_1}\cdots dx^{\varkappa_p} \neq 0$. Рассмотрим $\underset{0}{R_{n+1}} = \underset{0}{R_n}\times K$ — метрическое произведение $\underset{0}{R_n}$ на окружность K и $\underset{0}{C_{p+1}} = \underset{0}{C_p}\times K$. Если x^{n+1} — координата в K и $x^1,\ldots,x^n$ — в R_n, то ${}^{*}\sqrt{g} = \sqrt{g_{n+1\,n+1}}\,\sqrt{g}$, ${}^{*}B^{\varkappa_{p+1}\ldots\varkappa_n}$ обращается в $B^{\varkappa_{p+1}\ldots\varkappa_n}$ для R_n и

$$\frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{\underset{0}{C_{p+1}}} {}^{*}\Omega_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p\varkappa_{n+1}}\,dx^{\varkappa_1}\cdots dx^{\varkappa_p}\,dx^{\varkappa_{p+1}} =$$

$$=\int\limits_{\underset{0}{C_p}\times K} {}^{*}B^{[\varkappa_{p+1}\ldots}\,{}^{*}\sqrt{g}\,dx^{\varkappa_1}\cdots dx^{\varkappa_p}\,dx^{\varkappa_{n+1}]} = \int\limits_K ds\int\limits_{\underset{0}{C_p}} B^{[\varkappa_{p+1}\ldots}\sqrt{g}\,dx^{\varkappa_p}\cdots dx^{\varkappa_n]} \neq 0,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть $\underset{1}{\Omega}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}$ и $\underset{2}{\Omega}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_n}$ — поля, дающие топологические инварианты.*

Тогда для четного n некоторая ненулевая линейная комбинация их эквивалентна нулю, а для нечетного n оба поля эквивалентны нулю.

Доказательство. При варьировании $g_{\alpha\beta}$ в R_n

$$\delta\int\limits_{C_n=R_n} B\sqrt{g}\,dx^1\cdots dx^n = \int\limits_{R_n} \mathfrak{B}^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{g}\,dx^1\cdots dx^n,$$

где $\sqrt{g}\,\mathfrak{B}^{\alpha\beta} = \dfrac{\partial B\sqrt{g}}{\partial g_{\alpha\beta}} - \partial_\mu\dfrac{\partial B\sqrt{g}}{\partial\partial_\mu g_{\alpha\beta}} + \partial_{\mu\nu}\dfrac{\partial B\sqrt{g}}{\partial\partial_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}} - \cdots$ * лагранжева производная. $\mathfrak{B}^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta}$ — инвариант и $\overset{t}{\mathfrak{B}}{}^{\alpha\beta}\,\delta \overset{t}{g}_{\alpha\beta} = t^{-n/2}\mathfrak{B}^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta}$. По лемме 1 мы должны искать такие инварианты B, что $\mathfrak{B}^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta} \equiv 0$, но ${}^{*}\mathfrak{B}^{\alpha\beta}\,\delta^{*}g_{\alpha\beta} \not\equiv 0$, или, что равносильно, $\mathfrak{B}^{\alpha\beta}\,\xi_\alpha\,\xi_\beta \equiv 0$, но ${}^{*}\mathfrak{B}^{\alpha\beta}\,{}^{*}\xi_\alpha\,{}^{*}\xi_\beta \not\equiv 0$.

---

* Здесь и в аналогичном месте следующей леммы непосредственно используется $2s+1$ (соответственно $s+2$)-дифференцируемость R_n. Но условия $\mathfrak{B}^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} \equiv 0$, соответственно $\partial_{[\varkappa}\Omega_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p]} \equiv 0$, суть чисто алгебраические ограничения на строение $\Omega_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}$, и доказательство может быть перенесено на случай $s+1$-дифференцируемого R_n.

Покажем, что n четно и ${}^*\mathfrak{B}^{\alpha\beta}\, {}^*\xi_\alpha\, {}^*\xi_\beta = c\, {}^*A$,

$$ {}^*A = {}^*g_{[\alpha_1|\beta_1,\, \beta_2|\alpha_2}\, {}^*g_{\alpha_3|\beta_3,\, \beta_4|\alpha_4} \cdots {}^*\xi_{\alpha_{n+1}]}\, {}^*\xi_{\beta_{n+1}}\, {}^*g^{\alpha_1\beta_1} \cdots {}^*g^{\alpha_{n+1}]\beta_{n+1}}; $$

этого, очевидно, достаточно для доказательства леммы. Если $R_{n+1} = R_n \times K$ и варьируется лишь метрика в R_n, то ${}^*\mathfrak{B}^{\alpha\beta}\, \delta^* g_{\alpha\beta} = 0$, ${}^*\mathfrak{B}^{\alpha\beta}\, {}^*\xi_\alpha\, {}^*\xi_\beta = 0$. Поэтому ${}^*\mathfrak{B}^{\alpha\beta}\, {}^*\xi_\alpha\, {}^*\xi_\beta = {}^*H_{[\alpha_0 \cdots \alpha_n][\beta_0 \cdots \beta_n]}\, {}^*g^{\alpha_0\beta_0} \cdots {}^*g^{\alpha_n\beta_n}$.

Пусть в моном ${}^*H$ входит ${}^*g^{\alpha\beta} - h$, ${}^*g_{\alpha\beta,\gamma\delta} - h_2, \ldots$ Так как после свертывания все индексы заняты, то $4h_2 + 5h_3 + \cdots + 2 = 2h$, так как ${}^*\overset{t}{\mathfrak{B}}{}^{\alpha\beta} = t^{-n/2-1}\, {}^*\mathfrak{B}^{\alpha\beta}$, то $h_2 + h_3 + \cdots = h - n/2 - 1$. Следовательно, $2h_2 + 3h_3 + \cdots = n$. Отсюда общее число b нижних индексов в мономе $b = 4h_2 + 5h_3 + \cdots + 2 = 2n + 2 - h_3 - 2h_4 - 3h_5 \ldots$ Поэтому $h_3 = h_4 = \cdots = 0$, $h_2 = 2h_2$, $b = 2n + 2$. $2n + 2$ индексов произведения ${}^*g_{\alpha\beta,\gamma\delta} \cdots {}^*g_{\xi\eta,\theta\xi}\, {}^*\xi_\mu\, {}^*\xi_\nu$ надо разбить на две группы, чтобы проальтернировать внутри каждой. Ввиду свойств ${}^*g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ это можно сделать лишь одним (указанным) способом.

Лемма 3. *При $p < n$ $\Omega_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_p}$, дающее топологический инвариант, эквивалентно нулю.*

Доказательство. Для $p < n$ условие $\delta \int\limits_{C_p} \Omega_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_p}\, dx^{\varkappa_1} \cdots dx^{\varkappa_p} \equiv 0$ эквивалентно $\partial_{[\varkappa}\, \Omega_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_p]} \equiv 0$, т. е. $\nabla_\alpha B^{\alpha\varkappa_{p+1} \cdots \varkappa_n} \equiv 0$.

Аналогично лемме 2 получим $\nabla_\alpha {}^*B^{\alpha\varkappa_{p+2} \cdots \varkappa_n}\, {}^*\underset{p+2}{\xi}{}_{\varkappa_{p+2}} \cdots {}^*\underset{n}{\xi}{}_{\varkappa_n} = {}^*H_{[\alpha_0 \cdots \alpha_n][\beta_0 \cdots \beta_n]}\, {}^*g^{\alpha_0\beta_0} \cdots {}^*g^{\alpha_n\beta_n}$ и покажем, что общее число нижних индексов в каждом мономе меньше $2n + 2$.

4°. Сформулированная в 1° теорема непосредственно следует из лемм 2 и 3.

Автор благодарит И. М. Гельфанда, под руководством которого написана эта работа.

Поступило
14 VII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. B. Allendoerfer and A. Weil, Trans. Am. Math. Soc., 53, No 1 (1943).
[2] И. Схоутен и Д. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, М.—Л., 1939. [3] T. Y. Thomas, The Differential Invariants of Generalized Spaces, Cambr. Univ. Press., 1934. [4] А. А. Абрамов, ДАН, 81, № 2 (1951).