Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 1

МЕХАНИКА

М. Ф. ШУЛЬГИН

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПУАССОНА НА СЛУЧАЙ ГОЛОНОМНЫХ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 8 IX 1951)

В данной статье, которая является развитием нашей работы [1], дается обобщение классической теоремы Пуассона о свойствах интегралов канонических уравнений динамики на случай голономных неконсервативных систем.

1. Уравнения Гамильтона для голономных неконсервативных систем, как известно, имеют вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где H и Q_i — данные функции координат q_i, импульсов p_i и времени t.

Введем вспомогательные (избыточные) переменные $u_1, u_2, \ldots, u_n$, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ и положим

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} s_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} - Q_i \right) u_i. \tag{2}$$

Тогда мы можем переписать систему (1) так:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial K}{\partial s_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial K}{\partial u_i} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

вместе с уравнениями

$$\dot{u}_i = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad \dot{s}_i = -\frac{\partial K}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

служащими для определения вспомогательных координат $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и импульсов $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Совокупность уравнений (3) и (4) образует систему $4n$ канонических уравнений с гамильтоновой функцией

$$K(t; q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n; u_1, \ldots, u_n; s_1, \ldots, s_n).$$

В развернутом виде уравнения (4) запишутся так:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho \partial p_i} s_\rho + \sum_{\rho=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_\rho \partial p_i} - \frac{\partial Q_\rho}{\partial p_i} \right) u_\rho, \\ \dot{s}_i &= -\sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho \partial p_i} s_\rho - \sum_{\rho=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho \partial q_i} - \frac{\partial Q_\rho}{\partial q_i} \right) u_\rho \quad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{4'}$$

2. Лемма. *Если* $f(q_1, \ldots, q_n;\ p_1, \ldots, p_n;\ t) = \mathrm{const}$ — *интеграл системы уравнений* (1), *то система уравнений* (4′) *удовлетворяется значениями*

$$u_i = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad s_i = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

В этом можно убедиться непосредственной подстановкой значений переменных u_i, s_i из уравнений (5) и уравнения (4′). Выполняя эту замену, имея при этом в виду уравнения (1), получим тождества:

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{df}{dt}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{df}{dt}\right) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

3. Допустим, что нам известны два первых интеграла расширенной системы уравнений (3) и (4), например интегралы вида:

$$f(t;\ q_1, \ldots, q_n;\ p_1, \ldots, p_n) = \mathrm{const}, \tag{6}$$

$$\varphi(t;\ q_1, \ldots, q_n;\ p_1, \ldots, p_n;\ u_1, \ldots, u_n;\ s_1, \ldots, s_n) = \mathrm{const} \tag{7}$$

(здесь $f = \mathrm{const}$ является одновременно и интегралом первоначальной системы уравнений (1)). Тогда, в силу классической теоремы Пуассона, равенство

$$\psi = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi}{\partial s_i} - \frac{\partial f}{\partial s_i}\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\right) = \mathrm{const}$$

или

$$\psi = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi}{\partial s_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\right) = \mathrm{const} \tag{8}$$

будет тоже интегралом этой расширенной системы (3) и (4). В частности, может случиться, что вспомогательные переменные u_i, s_i $(i = 1, \ldots, n)$ не входят явно в функцию ψ, но эта функция содержит явно основные переменные t, q_i, p_i $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда, очевидно, в этом случае уравнение (8) определит некоторый интеграл первоначальной системы уравнений (1).

Рассмотрим общий случай, когда уравнение (8) содержит переменные u_i, s_i. Тогда, имея в виду, что $f = \mathrm{const}$ есть интеграл системы уравнений (1) и, следовательно, имеют место равенства (5), мы можем при помощи этих равенств исключить из уравнения (8) все избыточные переменные u_i, s_i. В результате равенство (8) будет содержать только переменные q_i, p_i, t и будет выражать, вообще говоря, новый интеграл первоначальной системы уравнений (1).

Резюмируя, мы можем полученный результат высказать следующим образом:

Теорема. *Если известен один первый интеграл* $f(q_i, p_i, t) = \mathrm{const}$ *уравнений движения* (1) *и известен некоторый первый интеграл* $\varphi(q_i, p_i, u_i, s_i, t) = \mathrm{const}$ *расширенной системы* (3) *и* (4), *то, вводя определяемые равенствами* (5) *значения величин* $u_1, \ldots, u_n$, $s_1, \ldots, s_n$ *в уравнение* (8), *мы получим, вообще говоря, новый интеграл первоначальной системы уравнений* (1).

Установленное обобщение теоремы Пуассона дает возможность, зная один интеграл расширенной системы (3) и (4) и один интеграл уравнений (1), найти второй интеграл системы (1) и таким образом получить полную систему независимых интегралов уравнений движения голономной неконсервативной системы.

4. Рассмотрим частный случай склерономной системы, т. е. когда уравнения движения (1) и, следовательно, функция K не зависят явно от времени t. В этом случае расширенная система уравнений (3) и (4) всегда допускает первый интеграл вида

$$K=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}s_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}-Q_i\right)u_i=\text{const}. \tag{9}$$

Предположим, что известен также интеграл системы (1):

$$f(t;\ q_1,\ldots,q_n;\ p_1,\ldots,p_n)=\text{const}.$$

Тогда, на основании приведенной выше теоремы, равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial p_i}Q_i=C=\text{const}$$

или, пользуясь скобками Пуассона, равенство

$$(f,H)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial p_i}Q_i=C \tag{10}$$

будет также интегралом системы уравнений (1).

Заметим еще, что если $f(q_i,\ p_i,\ t)=\text{const}$ есть интеграл системы (1), то функция f удовлетворяет тождественно условию

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f,H)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial p_i}Q_i\equiv 0. \tag{11}$$

Из формул (10) и (11) получаем интеграл

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\text{const}. \tag{10'}$$

Таким образом, *если* $f(q_i,\ p_i,\ t)=\text{const}$ *есть интеграл неконсервативной склерономной системы* (1), *то* $\frac{\partial f}{\partial t}=C$ *будет также интегралом этой системы, а следовательно, интегралами будут и* $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=C_1$, $\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}=C_2$ *и т. д. Если же функция* f *явно от* t *не зависит, то* $\frac{\partial f}{\partial t}=0$, *и тогда равенство* (10) *уже не будет интегралом системы* (1).

5. Закончим нашу статью, дав простой пример применения рассмотренного здесь метода в том случае, когда неконсервативная система склерономна.

Пример. Рассмотрим движение свободной точки (единичной массы) в среде, сопротивление которой пропорционально скорости, притягиваемой началом O пропорционально расстоянию. Тогда, если обозначить через q_1, q_2, q_3 прямоугольные координаты точки, а через p_1, p_2, p_3 — импульсы, будем иметь

$$H=T-U=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{1}{2}\mu^2(q_1^2+q_2^2+q_3^2),$$

$$Q=-2bp_1,\quad Q_2=-2bp_2,\quad Q_3=-2bp_3.$$

Уравнения движения в форме Гамильтона запишутся так:

$$\dot{q}_1 = p_1, \quad \dot{q}_2 = p_2, \quad \dot{q}_3 = p_3,$$
$$\dot{p}_1 = -\mu^2 q_1 - 2bp_1, \quad \dot{p}_2 = -\mu^2 q_2 - 2bp_2, \quad \dot{p}_3 = -\mu^2 q_3 - 2bp_3. \tag{12}$$

Легко убедиться, что уравнения движения допускают первый интеграл

$$f = e^{bt}(\mu' q_1 \sin\mu' t + bq_1 \cos\mu' t + p_1 \cos\mu' t) = C_1 \quad (\mu'^2 = \mu^2 - b^2, \ \mu > b). \tag{13}$$

Применяя к этому интегралу формулу (10) или (10′), мы получим новый интеграл

$$e^{bt}(\mu^2 q_1 \cos\mu' t - \mu' p_1 \sin\mu' t + bp_1 \cos\mu' t) = C_2. \tag{14}$$

Продолжая применение формулы (10′) к интегралу (14), найдем еще интегралы, но они являются следствием предыдущих.

Возвращаясь снова к уравнениям (12), можно убедиться, что они допускают первые интегралы

$$e^{bt}(\mu' q_2 \sin\mu' t + bq_2 \cos\mu' t + p_2 \cos\mu' t) = C_3,$$
$$e^{bt}(\mu' q_3 \sin\mu' t + bq_3 \cos\mu' t + p_3 \cos\mu' t) = C_4. \tag{15}$$

Прилагая к этим интегралам формулу (10′), мы получим два новых интеграла

$$e^{bt}(\mu^2 q_2 \cos\mu' t - \mu' p_2 \sin\mu' t + bp_2 \cos\mu' t) = C_5,$$
$$e^{bt}(\mu^2 q_3 \cos\mu' t - \mu' p_3 \sin\mu' t + bp_3 \cos\mu' t) = C_6. \tag{16}$$

Шесть интегралов (13), (14), (15) и (16) позволяют определить неизвестные q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3 в функции t и шести постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_6$. Это, очевидно, и будут те самые интегралы, которые можно получить непосредственным интегрированием уравнений движения (12).

Вычисления, проделанные для простейших голономных неконсервативных механических систем, подтверждают данные выводы и целесообразность применения обобщенной теоремы Пуассона.

6. В заключение заметим, что метод, которым мы здесь пользовались, без каких-либо изменений можно применить к исследованию движения неголономных механических систем, теория интегрирования уравнений движения которых, как известно, тоже почти не разработана.

Среднеазиатский государственный университет
Ташкент

Поступило
6 VIII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Ф. Шульгин, ДАН, 75, № 3 (1950).