Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 1

МАТЕМАТИКА

В. А. РОХЛИН

КЛАССИФИКАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ $(n+3)$-МЕРНОЙ СФЕРЫ В n-МЕРНУЮ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 IX 1951)

1. Предварительные рассмотрения. В этой работе применяется понтрягинский метод сведения гомотопических проблем к проблемам теории реперных полей [1], причем используются определения п°2 моей заметки [2]. Гомотопические классы отображений обозначаются так же, как сами отображения. Пусть $e_1, \ldots, e_r$ — фиксированный базис в R^r, R_0^{k+1} — подпространство из R^r с базисом $e_1, \ldots, e_{k+1}$ и S_0^k — единичная сфера в R_0^{k+1}. Классы отображений, порожденных реперными полями $(F_n \mid M^k) \subset R^r$ с $M^k = S_0^k$ называются сферическими и образуют сферическую подгруппу $\pi_r^\circ(S^n)$ гомотопической группы $\pi_r(S^n)$. $\pi_r^\circ(S^n)$ есть естественная фактор-группа k-мерной гомотопической группы $\pi_k(\Gamma_n)$ многообразия Γ_n ортогональных матриц порядка n с детерминантом $+1$. Именно, пусть φ — отображение сферы S_0^k в Γ_n, $n(a)$ — единичная внешняя нормаль к S_0^k в R_0^{k+1} в точке $a \in S_0^k$, $F_n(a)$ — репер, в который матрица $\varphi(a)$ преобразует репер $\{n(a), e_{k+2}, \ldots, e_{k+n} = e_r\}$, и f — отображение сферы S^r в сферу S^n, порожденное полем $(F_n \mid S_0^k)$; класс f определяется классом φ, мы пишем $f = D\varphi$, и D есть гомоморфизм группы $\pi_k(\Gamma_n)$ на $\pi_r^\circ(S^n)$. Γ_n допускает естественное вложение I в Γ_{n+1}: матрица $\| \gamma'_{ij} \| = I(\| \gamma_{ij} \|)$ определяется формулами $\gamma'_{ij} = \gamma_{ij}$, $\gamma'_{i, n+1} = \gamma'_{n+1, j} = 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$; $\gamma'_{n+1, n+1} = 1$. Это вложение связано с операцией E Фройденталя [3] соотношением $ED = DI$. В частности, $E\pi_r^\circ(S^n) \subset \pi_{r+1}^\circ(S^{n+1})$.

Переходя к случаю $k = 3$, будем считать точки $x \in R^4$ кватернионами с единицами e_1, e_2, e_3, e_4 и будем обозначать произведение и скалярное произведение кватернионов x, y, соответственно, через xy и (x, y). $\pi_3(\Gamma_3)$ есть свободная циклическая группа с образующей φ_3, определяемой формулами $\varphi_3(a) = \| \gamma_{ij}(a) \|$, $\gamma_{ij}(a) = (ae_{i+1}a^{-1}, e_{j+1})$ $(a \in S_0^3;\ i, j = 1, 2, 3)$; $\pi_6^\circ(S^3)$ есть циклическая группа с образующей $f_3 = D\varphi_3$. Класс f_3 изучался Блакерсом и Массеем [4], из результатов которых следует, что f_3 не делится на 2 и что порядок группы $\pi_6(S^3)$ делится на 2; известно также, что этот порядок делится на 3 [5]. $\pi_3(\Gamma_4)$ есть прямая сумма двух своих свободных циклических подгрупп с образующими φ_4, ψ_4, определяемыми формулами $\varphi_4 = I\varphi_3$, $\psi_4(a) = \| \gamma_{ij}(a) \|$, $\gamma_{ij}(a) = (ae_i, e_j)$ $(a \in S_0^3;\ i, j = 1, 2, 3, 4)$; $\pi_7^\circ(S^4)$ есть сумма двух своих циклических подгрупп с образующими $f_4 = D\varphi_4 = Ef_3$, $g_4 = D\psi_4$. Легко видеть, что g_4 есть класс гопфовского отображения сферы S^7 в сферу S^4 ([6]), так что подгруппа $\{g_4\}$ свободна, и известно, что E есть изоморфизм группы $\pi_6(S^3)$ в $\pi_7(S^4)$ и что вся группа $\pi_7(S^4)$ есть прямая сумма своих подгрупп $E\pi_6(S^3)$ и $\{g_4\}$ ([7]); таким образом, $\pi_7^\circ(S^4)$ есть прямая сумма подгрупп $\{f_4\}=E\pi_6^\circ(S^3)$ и $\{g_4\}$. $\pi_3(\Gamma_n)$ при $n \geqslant 5$ есть свободная циклическая группа с образующей $\psi_n = I^{n-4}\psi_4$; $\overset{\circ}{\pi}_{n+3}(S^n)$ при $n\geqslant 5$ есть циклическая группа с образующей $g_n = D\psi_n = E^{n-4}g_4$, и известно ([3]), что E при $n \geqslant 5$ есть изоморфизм группы $\pi_{n+3}(S^n)$ на группу $\pi_{n+4}(S^{n+1})$. Наконец, ядро гомоморфизма I группы $\pi_3(\Gamma_4)$ на группу $\pi_3(\Gamma_5)$ есть циклическая группа с образующей $\chi_4=\varphi_4-2\psi_4$, и оказывается, что циклическая подгруппа группы $\pi_7^\circ(S^4)$ с образующей $h_4 = D\chi_4 = f_4 - 2g_4$ есть ядро гомоморфизма E всей группы $\pi_7(S^4)$. Что это ядро циклично — известно, вычислена и его образующая h ([8]), но в других терминах; мы воспользуемся только тем, что ее гопфовский инвариант $\gamma(h)$ равен ± 2, и заметим, что $\gamma(h_4)=\gamma(f_4)-2\gamma(g_4) = -2$. Так как $Eh_4=ED\chi_4=DI\chi_4=0$, то $h_4 \in \{h\}$, $h_4=\lambda h$, $\gamma(h_4)=\lambda\gamma(h)$, $\lambda=\pm 1$, и $h_4=\pm h$.

2. Формулировка основных результатов. $\pi_6(S^3)$ есть циклическая группа порядка 6 с образующей f_3; $\pi_7(S^4)$ есть прямая сумма своей циклической подгруппы порядка 6 с образующей f_4 и свободной циклической подгруппы с образующей g_4; $\pi_{n+3}(S^n)$ при $n\geqslant 5$ есть циклическая группа порядка 12 с образующей g_n. В частности, $\pi_{n+3}(S^n)=\pi^\circ_{n+3}(S^n)$ $(n \geqslant 3)$.

В силу изложенного в п°1, достаточно доказать, что: а) при большом n $\pi_{n+3}(S^n) = \overset{\circ}{\pi}_{n+3}(S^n)$; б) при большом n $12 g_n = 0$. Из результатов Л. С. Понтрягина ([1]) следует, что во всяком классе отображений сферы S^r в сферу S^n имеется отображение, порожденное некоторым полем $(F_n|M^k)\subset R^r$, и что всякое поле $(F_n|M^k)\subset R^r$, порождающее отображение, гомотопное нулю, служит краем некоторого поля $(F'_n|M^{k+1})$, заданного в полупространстве R_1^{r+1} (с границей R^r) пространства R^{r+1}. Отсюда легко вывести, что утверждения а), б) эквивалентны утверждениям: а') при большом n для всякого поля $(F_n|M^3)\subset R^r$, у которого $M^3\cap S_0^3=0$, существует поле $(G_n|M^4)\subset R_1^{n+4}$ с краем $(F_n|M^3)+(F_n^0|S_0^3)$, составленным из поля $(F_n|M^3)$ и некоторого поля $(F_n^0|S_0^3)$; б') в R_1^{n+4} существует поле $(H_n|N^4)$ с краем $(H_n^0|S_0^3)$, образованным по схеме п°1 из отображения класса $12\psi_n$.

3. Построение поля $(G_n|M^4)$. Пусть M_1^4 — ориентируемое многообразие с краем M_1^3, гладко гомеоморфным M^3; можно показать, что такое M_1^4 существует для всякого ориентируемого замкнутого M^3. Вложим M_1^4 в R^{n+4} так, чтобы край M_1^3 совпал с M^3 и плоскости, нормальные к M_1^4 в точках этого края, попали в R^{n+3}, и будем продолжать F_n с M^3 на M_1^4. Мы получим в M_1^4 класс $z^2=z^2(M_1^4)$ абсолютных двумерных Δ-гомологий mod 2, каждый цикл которого может быть реализован как цикл особенностей. Класс этот при указанных краевых условиях не зависит от способа вложения многообразия M_1^4 в R^{n+4}; если многообразие M_1^4 замкнуто (край M_1^3 пуст), то $z^2(M_1^4)$ есть просто двумерный характеристический Δ-класс ([9], [10]). Мы покажем, что существует M_1^4 с $z^2=0$. Для такого M_1^4 поле F_n может быть продолжено в поле G_n, определенное на M_1^4 всюду вне шаровой окрестности V^4 некоторой точки; полагая $M^4=M_1^4-V^4$ и вкладывая M_1^4 в R^4 так, чтобы часть M^4 попала в R_1^4, ее край $M_1^3+S_1^3$, где S_1^3 — граница шара V^4, совпал с $M^3+S_0^3$

и плоскости, нормальные к M_1^4 в точках этого края, попали в R^{n+3}, мы и получим нужное нам поле $(G_n \mid M^4)$.

Возьмем сначала какое-нибудь связное M_1^4. Сделаем одномерную группу Бетти многообразия M_1^4 тривиальной — например, путем вырезывания окрестностей внутренних к M_1^4 базисных замкнутых путей и вклеивания на их место произведений двумерной сферы на двумерный элемент. Тогда z^2 можно будет рассматривать как приведенный mod 2 класс Z^2 целочисленных гомологий. Покажем, что индекс $i(Z^2, Z^2)$ самопересечения класса Z^2 можно сделать равным нулю. Пусть Q^4 — ориентированная комплексная проективная плоскость, Q_1^4 — дополнение шаровой окрестности какой-нибудь ее точки, Q^2 — ориентированная проективная прямая в Q_1^4 и Σ^2, σ^2 — определяемые ею классы целочисленных циклов и циклов mod 2. Ориентируем M_1^4, вырежем из M_1^4 шаровую окрестность какой-нибудь внутренней точки и приклеим на ее место Q_1^4, согласуя ориентации. Мы получим новое многообразие $\overline{M}_1^4$ типа M_1^4, и из того, что σ^2 есть двумерный характеристический класс многообразия Q^4, легко вывести, что $z^2(\overline{M}_1^4) = z^2(M_1^4) + \sigma^2$. Это—приведенный mod 2 целочисленный класс $\overline{Z}^2 = Z^2 + \Sigma^2$, и $i(\overline{Z}^2, \overline{Z}^2) = i(Z^2, Z^2) + i(\Sigma^2, \Sigma^2) = i(Z^2, Z^2) \pm 1$, где знак зависит от ориентации Q^4. Повторяя этот процесс с надлежащей ориентацией Q^4, мы через конечное число шагов получим такое M_1^4 и такой класс Z^2, что $i(Z^2, Z^2) = 0$.

Пусть P^2 — ориентированная замкнутая поверхность класса Z^2 внутри M_1^4 (ср. ([10]), § 23). В силу равенства $i(Z^2, Z^2) = 0$ ее окрестность U^4 разлагается в прямое произведение поверхности P^2 на двумерный элемент (см. ([10]), § 18). Вложим P^2, как сферу с ручками, в $R^3 \subset R^4$ и замкнем R^4 несобственной точкой в S^4. Пусть E^4 — окрестность поверхности P^2 в R^4 и ξ — естественный гомеоморфизм между U^4 и E^4. Возьмем внутри $S^4 - E^4$ окружность, зацепленную с P^2, вырежем ее окрестность и, вклеив вместо этой окрестности произведение двумерной сферы на двумерный элемент так, чтобы из S^4 получилось прямое произведение P^4 двух двумерных сфер, склеим $M_1^4 - U^4$ и $P^4 - E^4$ при помощи ξ в новое многообразие $\overline{M}_1^4$ типа M_1^4. Продолжим поле F_n на $M_1^4 - U^4$ и построим какое-нибудь реперное поле с той же ориентацией на $P^4 - E^4$. Пусть $C_1^1, \ldots, C_p^1$; $C_1^2, \ldots, C_p^2$ — такие базы гомологий края P^3 многообразия $P^4 - E^4$, что $i(C_\alpha^1, C_\beta^2) = \delta_{\alpha\beta}$, и $C_{\alpha_1}^1, \ldots, C_{\alpha_q}^1$ — те из путей $C_1^1, \ldots, C_p^1$, на которых полученные два поля негомотопны между собой. Возьмем внутри $P^4 - E^4$ сферу Σ^2, гомологичную в $P^4 - E^4$ циклу $C_{\alpha_1}^2 + \ldots + C_{\alpha_q}^2$, вырежем ее окрестность (прямое произведение сферы Σ^2 на двумерный элемент) и приклеим эту же окрестность гомотопически другим способом (ср. ([2]), п°4). Тогда $\overline{M}_1^4$ превратится в многообразие типа M_1^4, для которого $z^2 = 0$.

Заметим для дальнейшего, что многообразие M_1^4, если оно замкнуто, превращается операциями предыдущего абзаца в такое замкнутое многообразие, которое вместе с M_1^4 ограничивает некоторое ориентируемое пятимерное многообразие. Таким образом, если характеристический класс $z^2(M_1^4)$ замкнутого многообразия M_1^4 может быть получен приведением mod 2 из некоторого целочисленного класса Z^2 с $i(Z^2, Z^2) = 0$, то существует такое замкнутое многообразие N_1^4, что

$z^2(N_1^4)=0$ и что M_1 и N_1^4 вместе ограничивают некоторое ориентируемое пятимерное многообразие.

4. Построение поля $(H_n | N^4)$. Мы покажем, что существует ориентируемое замкнутое многообразие N_1^4 с нулевым двумерным характеристическим классом z^2 и понтрягинским характеристическим числом X_{22} ([11], [12]), равным ± 24 *. При всяком вложении такого многообразия в R^{n+4} на нем можно построить реперное поле H_n, определенное всюду вне шаровой окрестности V^4 некоторой точки. Полагая $N^4 = N_1^4 - V^4$ и вкладывая N_1^4 в R^{n+4} так, чтобы часть N^4 попала в R_1^{n+4}, ее ориентированный край S_1^3 совпал, с надлежащей ориентацией, со сферой S_0^3 и плоскости, нормальные к N_1^4 в точках этого края, попали в R^{n+3}, мы и получим нужное нам поле $(H_n | N^4)$ То, что его край $(H_n^0 | S_0^3)$ отвечает по схеме n°1 отображению сферы S_0^3 в Γ_n класса $12\psi_n$, следует из равенства $X_{22} = \pm 24$: как показывают вычисления, кратность в смысле Понтрягина ([12]) особенности типа X_{22}, которую имеет в центре шара V^4 поле, построенное на S_0^3 по схеме n°1 из отображения сферы S_0^3 в Γ_n класса $\lambda\psi_n$, равна $\pm 2\lambda$, и в нашем случае эта кратность равна X_{22}.

Пусть Q_0^4 — ориентированная комплексная проективная плоскость с девятью шаровыми отверстиями и Q_j^4 $(j = 1, \ldots, 9)$ — противоположно ориентированная комплексная проективная плоскость с одним шаровым отверстием. Склеим $Q_0^4, Q_1^4, \ldots, Q_9^4$, согласуя ориентации, в замкнутое многообразие M_1^4, обозначим через Σ_j^2 $(j = 0, 1, \ldots, 9)$ целочисленный гомологический класс как-либо ориентированной проективной прямой из Q_j^4 и положим $Z^2 = 3\Sigma_0^2 + \Sigma_1^2 + \cdots + \Sigma_9^2$. Класс Z^2, приведенный mod 2, есть характеристический класс z^2 многообразия M_1^4, и $i(Z^2, Z^2) = 9i(\Sigma_0^2, \Sigma_0^2) + i(\Sigma_1^2, \Sigma_1^2) + \cdots + i(\Sigma_9^2, \Sigma_9^2) = \pm(9 - 1 - \cdots - 1) = 0$. Следовательно (см. n°3, конец), существует такое замкнутое многообразие N_1^4, что $z^2(N_1^4) = 0$ и что M_1^4 и N_1^4 вместе ограничивают некоторое ориентируемое пятимерное многообразие. В силу последнего условия мы имеем $X_{22}(N_1^4) = X_{22}(M_1^4)$ (см. ([11]), теорема 3), а $X_{22}(M_1^4) = \pm 24$ (см. ([12]), § 3, E). Итак, $z^2(N_1^4) = 0$, $X_{22}(N_1^4) = \pm 24$.

5. Замечание. Методами этой работы нетрудно доказать, что $X_{22}(M^4) \equiv 0 \pmod 3$ для всякого ориентируемого замкнутого многообразия M^4; если же $z^2(M^4) = 0$, то $X_{22}(M^4) \equiv 0 \pmod{24}$.

Поступило
3 IX 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, ДАН, 70, 957 (1950). [2] В. А. Рохлин, ДАН, 80, № 4 (1951). [3] H. Freudenthal, Comp. Math., 5, 299 (1937). [4] A. L. Blakers and W. S. Massey, Ann. of Math., 53, 161 (1951). [5] J. P. Serre, C. R., 232, 142 (1951). [6] H. Hopf, Fund. Math., 25, 427 (1935). [7] W. Hurewicz and N. E. Steenrod, Proc. Nat. Acad. USA, 27, 60 (1941). [8] G. W. Whitehead, Ann. of Math., 51, 192 (1950). [9] E. Stiefel, Comment. Math. Helv., 8, 305 (1936). [10] H. Whitney, Lectures in Topology, 1941, 101—141. [11] Л. С. Понтрягин, Матем. сборн., 21, 233 (1947). [12] Л. С. Понтрягин, там же, 24, 129 (1949).

* Связь между проблемой существования четырехмерного многообразия с $z^2 = 0$, но $X_{22} \neq 0$, и изучением отображений сферы S^{n+3} в сферу S^n была указана Понтрягиным ([11]).