Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 1

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР Л. А. ЛЮСТЕРНИК и А. И. ФЕТ

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ЗАМКНУТЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Пусть R — замкнутое, четырежды непрерывно дифференцируемое n-мерное многообразие, l — кусочно непрерывно дифференцируемая кривая на R, $J(l)$ — функционал, порождаемый положительной положительно регулярной вариационной задачей на R.

Теорема 1. *Через каждые две точки a, b $(a \neq b)$ замкнутого многообразия R проходит не менее двух разных экстремалей вариационной задачи J.*

Если R односвязно, то либо существует две экстремали разной длины с заданными концами a, b, либо континуум таких экстремалей равной длины.

Если R неодносвязно, то имеется не менее двух гомотопических классов путей с началом в a и концом в b. Как известно, в каждом таком классе существует J-кратчайшая (см., например, (2)). Все эти J-кратчайшие негомотопны. Достаточно поэтому рассмотреть случай, когда R односвязно.

Если бы все гомотопические группы $\pi^r(R)$ $(r = 2, 3, \ldots, n)$ были тривиальны, то R можно было бы деформировать в точку на R (3), что невозможно, так как R — замкнутое многообразие.

Пусть $\pi^r(R)$ нетривиально $(2 \leqslant r \leqslant n)$. Тогда найдется существенное отображение f сферы S^r в R такое, что две диаметрально противоположные точки a', b' сферы S^r перейдут в заданные точки a, b на R. Можно добиться, чтобы меридианы λ сферы S^r с концами a, b переходили в кусочно непрерывно дифференцируемые кривые l на R: $l = l(\lambda)$. Множество всех меридианов λ с естественной топологией гомеоморфно сфере S^{r-1}; таким образом, $l(\lambda)$ есть отображение S^{r-1} в пространство $\Omega_{ab}(R)$ кусочно непрерывно дифференцируемых кривых на R с концами a, b (ср. (1)). Если отображение f достаточно правильно (например, симплициально, чего всегда можно добиться), то $l(\lambda)$ непрерывно.

Пусть (λ, t) будет точка S^r, лежащая на λ и делящая λ в отношении $t:(1-t)$; $(\lambda, 0) = a$, $(\lambda, 1) = b$. Допустим, что $l(\lambda)$ — несущественное отображение; пусть $l_\alpha(\lambda)$ — деформация $l_0(\lambda) = l(\lambda)$ в тривиальное отображение $l_1(\lambda)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$. Обозначим через $P(\lambda, t, \alpha)$ точку кривой $l_\alpha(\lambda)$, делящую J-длину этой кривой в отношении $t:(1-t)$.

Полагая $f_\alpha(\lambda, t) = P(\lambda, t, \alpha)$, получаем деформацию отображения f_0 в отображение f_1; как легко убедиться, f_1 несущественно. С другой стороны, нетрудно показать, что f_0 гомотопно существенному отображению f.

Таким образом, мы получаем противоречие. Итак, $l(\lambda)$ — существенное отображение; следовательно, множество кривых $l(S^{r-1})$ (образов всех меридианов S^r) имеет относительно $\Omega_{ab}(R)$ категорию, не меньшую двух. Но отсюда, как известно, вытекает утверждение теоремы ([1]).

Теорема 2. *На замкнутом многообразии R существует замкнутая экстремаль J-задачи.*

Пусть $\pi^1(R) = 0$ (в противном случае теорема хорошо известна). Пусть еще $\pi^k(R) = 0$ $(k \leqslant r-1)$, $\pi^r(R) \neq 0$ $(r \leqslant n)$. Можно построить такое семейство T^{r-1} направленных окружностей q на S^r, что существенное отображение f (см. выше) порождает непрерывное отображение $g_0 T^{r-1}$ в пространство Π замкнутых кусочно непрерывно дифференцируемых кривых на R; семейство T^{r-1} включает одноточечные кривые, множество которых имеет размерность не выше $r-2$. Допустим, что существует деформация g_0 в отображение g_1 такое, что все $g_1(q)$ — сколь угодно малой J-длины.

Тогда, применяя известные деформации ([1]), мы получим деформацию g_1 в g_2, отображающее все q в одноточечные кривые. Деформации g_α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2)$ соответствует деформация f_α отображения $f_0 = f$, причем из $\pi^k(R) = 0$ $(k \leqslant r-1)$ вытекает ([3]), что f_2 гомотопно нулю. Полученное противоречие доказывает, что $\mathrm{cat}_\Pi g_0(T^{r-1}) \geqslant 2$, где категория рассматривается относительно деформаций, переводящих одноточечные кривые в одноточечные. Отсюда легко следует теорема 2.

Поступило
8 IX 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Люстерник, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 19 (1947). [2] В. Майер, Усп. матем. наук, 9 (1941). [3] В. А. Рохлин, там же, 1, в. 5—6, 194 (1946).