Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 1

МАТЕМАТИКА

М. Б. КАПИЛЕВИЧ

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} - \frac{a}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial \sigma} - b^2 u = 0$ *

(Представлено академиком М. В. Келдышем 3 IX 1951)

Полагая, что константа a уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} - \frac{a}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial \sigma} - b^2 u = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

лежит в пределах $0 < a < 1$, рассмотрим в полуплоскости $\sigma > 0$ замкнутую область $\overline{D}$, ограниченную отрезком AB оси x и характеристиками AC и BC уравнения (1), исходящими из точек $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$.

Теорема 1. *Существует единственное решение уравнения* (I), *непрерывное вместе со своими производными второго порядка в области* $\overline{D}$ *и удовлетворяющее на линии* $\sigma = 0$ *условиям*

$$u(x, 0) = \tau(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x), \qquad (1)$$

где $y = -\left(\frac{\sigma}{1-a}\right)^{1-a}$, *а* $\tau(x)$ *и* $\nu(x)$ — *определенные на отрезке* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *функции, непрерывные вместе со своими производными второго порядка.*

Это решение имеет вид:

$$u(x, \sigma) = \gamma_1 \int_0^1 \tau(x') T^{2\beta-2} \overline{J}_{\beta-1}(2b\sigma T)\, dt + \gamma_2 y \int_0^1 \nu(x') T^{-2\beta} \overline{J}_{-\beta}(2b\sigma T)\, dt, \qquad (2)$$

где

$$x' = x + \sigma(2t - 1), \quad T = \sqrt{t(1-t)}, \quad \beta = \frac{a}{2},$$

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}, \quad \overline{J}_{-p}(z) = \frac{\Gamma(1-p)\, z^p}{2^p} J_{-p}(z)$$

($J_{-p}(z)$ — *функция Бесселя*).

Замечание 1. Пользуясь формулой (2), находим начальные данные для функции Римана $v(x, \sigma, x_0, \sigma_0)$ уравнения (I), а также для

* Часть работы (теорема 1) доложена в Математическом институте им. В. А. Стеклова Академии наук СССР, 3 I 1950 г.

функции $V=\sigma_0^{-a}v$, которая по переменным (x_0, σ_0) удовлетворяет тому же уравнению:

$$v\Big|_{\sigma=0}=\frac{2^a\gamma_2\sigma_0^a}{(1-a)\,r^{2\beta}}\bar{J}_{-\beta}(br_0),\quad \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{\sigma=0}=\frac{2^{2-a}\gamma_1\sigma_0}{(1-a)^a r_0^{2-2\beta}}\bar{J}_{\beta-1}(br_0), \tag{3}$$

$$V\Big|_{\sigma_0=0}=\frac{2^a\gamma_2}{(1-a)r^{2\beta}}\bar{J}_{-\beta}(br),\quad \frac{\partial V}{\partial y_0}\Big|_{\sigma_0=0}=\frac{2^{2-a}\gamma_1\sigma^{1-a}}{(1-a)^a r^{2-2\beta}}\bar{J}_{\beta-1}(br), \tag{4}$$

где

$$r^2=\sigma^2-(x-x_0)^2,\quad r_0^2=\sigma_0^2-(x_0-x)^2.$$

На прямой $\sigma_0=0$ значения (4) являются многозначными функциями с двумя точками разветвления $x_0=x\pm\sigma$.

Предполагая для определенности эти точки фиксированными, проведем в каждой из них две характеристики уравнения (I), которые разделят полуплоскость $\sigma_0>0$ на 6 областей.

В точках (x_0, σ_0), расположенных в областях I, II, III, где, соответственно,

$$\lambda_0<\mu_0<\lambda<\mu,\quad \lambda<\lambda_0<\mu_0<\mu$$

и

$$\lambda<\mu<\lambda_0<\mu_0\quad (\lambda=x-\sigma,\ \ \mu=x+\sigma,\ \ \lambda_0=x_0-\sigma_0,\ \ \mu_0=x_0+\sigma_0),$$

влияние точек разветвления не сказывается.

На областях IV и V, где

$$\lambda_0<\lambda<\mu_0<\mu \text{ и } \lambda<\lambda_0<\mu<\mu_0,$$

оказывает воздействие только одна из особых точек.

Наконец, только в области VI, где

$$\lambda_0<\lambda<\mu<\mu_0,$$

функция $V(x_0, \sigma_0)$ определяется обеими точками разветвления. В соответствии с этим характеристики, которые разделяют указанные области, являются линиями разветвления для функции $v(x, \sigma, x_0, \sigma_0)$.

С помощью формул (2) и (4) в области II найдем:

$$v(x, \sigma, x_0, \sigma_0)=\sigma_0\int\limits_{x_0-\sigma_0}^{x_0+\sigma_0} g(x, \sigma, x_0, \sigma_0, x')\,dx'+\sigma_0^a\sigma^{1-a}\int\limits_{x_0-\sigma_0}^{x_0+\sigma_0} h(x, \sigma, x_0, \sigma_0, x')\,dx', \tag{5}$$

где

$$g(x, \sigma, x_0, \sigma_0, x')=mr^{-2\beta}r_0^{2\beta-2}\bar{J}_{-\beta}(br)\bar{J}_{\beta-1}(br_0),$$

$$h(x, \sigma, x_0, \sigma_0, x')=-mr^{2\beta-2}r_0^{-2\beta}\bar{J}_{\beta-1}(br)\bar{J}_{-\beta}(br_0), \tag{6}$$

$$m=\frac{2\gamma_1\gamma_2}{1-a}=\frac{\operatorname{tg}\beta\pi}{\pi}.$$

Аналогичным путем, используя значения (3), в области VI получим:

$$v(x, \sigma, x_0, \sigma_0)=\sigma_0\int\limits_{x-\sigma}^{x+\sigma}\bar{g}(x, \sigma, x_0, \sigma_0, x')\,dx'+\sigma_0^a\sigma^{1-a}\int\limits_{x-\sigma}^{x+\sigma}\bar{h}(x, \sigma, x_0, \sigma_0, x')\,dx', \tag{7}$$

где

$$\overline{g} = -g, \quad \overline{h} = -h.$$

Замечание 2. Каждое из слагаемых G_1 и G_2 в формуле (7) (и, соответственно, (5)) вдоль характеристик $x \pm \sigma = x_0 \pm \sigma_0$ обращается в бесконечность порядка $\ln \rho$ $(\rho = \sqrt{(\sigma-\sigma_0)^2 - (x-x_0)^2})$, т. е. G_1 и G_2 дают фундаментальные решения уравнения (1), которые в окрестности значений $\rho = 0$ имеют вид

$$G_{1,2}(x, \sigma, x_0, \sigma_0) = P_{1,2}(x, \sigma, x_0, \sigma_0) \ln \rho + Q_{1,2}(x, \sigma, x_0, \sigma_0), \tag{8}$$

где $P_{1,2}$ и $Q_{1,2}$ — функции, ограниченные при $\rho = 0$, причем P_1 и P_2 могут только постоянными множителями отличаться от функции Римана для уравнения (I) ([1], стр. 101).

Замечание 3. Представление вида (5) для функции Римана может быть получено и в случае более общих уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа. Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{\sqrt{\overline{K}}} \frac{d\sqrt{\overline{K}}}{d\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = 0, \tag{9}$$

где $\overline{K}$ — некоторая функция σ, допускающая в окрестности $\sigma = 0$ разложение в ряд вида

$$\sqrt{\overline{K}} = b_1 \sigma^{1/3} + b_3 \sigma^{3/3} + b_5 \sigma^{5/3} + \cdots$$

$(b_1, b_3, \ldots$ — постоянные величины).

К виду (9) может быть сведено, например, уравнение С. А. Чаплыгина [2] для функции тока плоского установившегося безвихревого течения идеального газа, а также уравнения пластического равновесия при плоском напряженном состоянии, исследованные в работе [3]. Как показал Ф. И. Франкль [4], решение задачи (I) для уравнения (9) может быть представлено в виде

$$\psi(x, \sigma) = \sigma^{2/3} \int_{x-\sigma}^{x+\sigma} g_1(x, \sigma, x') \tau(x') \, dx' + \int_{x-\sigma}^{x+\sigma} h_1(x, \sigma, x') \nu(x') \, dx', \tag{10}$$

где

$$g_1(x, \sigma, x') = O(1) r^{-5/6}, \quad h_1(x, \sigma, x') = O(1) r^{-1/6},$$

а через $O(1)$ обозначена ограниченная при $r = 0$ функция с границей, не зависящей от x, σ, x'.

С помощью формулы (10) легко найти начальные данные для функции Римана $v(x, \sigma, x_0, \sigma_0)$ уравнения (9), а также для функции $V = [\overline{K}(\sigma_0)]^{-1/2} v(x, \sigma, x_0, \sigma_0)$, которая по переменным x_0, σ_0 удовлетворяет тому же уравнению

$$v\Big|_{\sigma=0} = \sqrt{\overline{K}(\sigma_0)}\, \overline{h}_1(x_0, \sigma_0, x'), \quad \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{\sigma=0} = \sqrt{\overline{K}(\sigma_0)}\, \sigma_0^{2/3} \overline{g}_1(x_0, \sigma_0, x'),$$

$$V\Big|_{\sigma_0=0} = -\frac{2}{b_1}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} h_1(x, \sigma, x') = \overline{h}_1(x, \sigma, x'),$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_0}\Big|_{\sigma_0=0} = \frac{2}{b_1}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \sigma^{2/3} g_1(x, \sigma, x') = \sigma^{2/3} \overline{g}_1(x, \sigma, x').$$

Таким образом, как и в случае уравнения (I), для уравнения (9) в области II, определенной выше, функция Римана может быть представлена в виде (5), если положить в этой формуле $a = {}^1/_3$ и ввести обозначения:

$$g(x, \sigma, x_0, \sigma_0, x') = \sigma^{-1/6}\sqrt{\overline{K}(\sigma_0)}\,\overline{h}_1(x, \sigma, x')\,g_1(x_0, \sigma_0, x') = O(1)\,r^{-1/6}r_0^{-5/6}, \tag{11}$$

$$h(x, \sigma, x_0, \sigma_0, x') = \sigma_0^{-1/6}\sqrt{\overline{K}(\sigma_0)}\,\overline{g}_1(x, \sigma, x')\,h_1(x_0, \sigma_0, x') = O(1)\,r^{-5/6}r_0^{-1/6}.$$

В области VI для функции $v(x, \sigma, x_0, \sigma_0)$ получим выражение вида (7) со следующими значениями для $\overline{g}$ и $\overline{h}$ (при $(a = {}^1/_3)$:

$$\overline{g}(x, \sigma, x_0, \sigma_0, x') = \sigma_0^{-1/6}\sqrt{\overline{K}(\sigma_0)}\,\overline{g}_1(x_0, \sigma_0, x')\,h_1(x, \sigma, x') = O(1)\,r_0^{-5/6}r^{-1/6},$$

$$\overline{h}(x, \sigma, x_0, \sigma_0, x') = \sigma_0^{-1/6}\sqrt{\overline{K}(\sigma_0)}\,\overline{h}_1(x_0, \sigma_0, x')\,g_1(x, \sigma, x') = O(1)\,r_0^{-1/6}r^{-5/6}. \tag{12}$$

Подобно тому, как в случае уравнения Эйлера — Пуассона ([5]), функция Римана выражается через гипергеометрический интеграл, линии ветвления которого совпадают с характеристиками уравнения. Для уравнений (I) и (9) функция $v(x, \sigma, x_0, \sigma_0)$ представляется в виде интегралов с теми же линиями разветвления. Как показывают выражения (11) и (12), каждое из слагаемых в формулах (5) и (7), обладающее логарифмической особенностью на границах $x \pm \sigma = x_0 \pm \sigma_0$ указанных выше областей, дает фундаментальное решение уравнения (9), которое в окрестности значений $\rho = 0$ может быть представлено в виде (8).

Замечание 4. Формула (2), которую можно рассматривать так же как общее решение уравнения (I) с двумя произвольными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, справедлива при $0 < a < 1$. Если $a = 1$, то (2) содержит только одну произвольную функцию. Общее решение для (I) можно в этом случае получить, если, следуя Г. Дарбу ([5]), положить $a = 1$, заменить $\tau(x)$ и $\nu(x)$ соответственно через $\frac{\tau}{2} - \frac{\nu}{\varepsilon}$ и $\frac{\tau}{2} + \frac{\nu}{\varepsilon}$, а затем перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Замечание 5. Пользуясь методом интеграла Фурье, можно в явном виде получить представление (10) решения задачи Коши, а затем, определив с его помощью начальные данные для функций v и V, построить в замкнутой форме выражения вида (5) и (7) для функций Римана и фундаментального решения уравнения (9).

Поступило
14 VIII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Hadamard, Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Chap. III, Paris, 1932. [2] С. А. Чаплыгин, О газовых струях, гл. V, собр. соч., 2, изд. АН СССР, 1933. [3] В. В. Соколовский, Прикладн. матем. и мех., 13, в. 2, 219 (1949). [4] Ф. И. Франкль, Изв. АН СССР, сер. матем., 8, № 5, 195 (1944). [5] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Paris, 1894.