Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 1

МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 5 IX 1951)

1°. Пусть $R^{(k)}$ — k-мерное евклидово пространство, $X(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)})$ — точка этого пространства. Через $L_{n_1 n_2 \ldots n_k}(f, X)$ мы обозначаем интерполяционный полином Лагранжа степени не выше $n_1, n_2, \ldots, n_k$, построенный для системы узлов [1] $\{X_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, \prod_{j=1}^{k}(n_j + 1)$ из единичного куба K, $-1 \leqslant x^{(i)} \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, и функции $f(X)$, определенной в K.

Рассуждая, как в одномерном случае, можно доказать следующую теорему:

Какова бы ни была система узлов интерполирования, всегда существует непрерывная в K функция $f(X)$, для которой интерполяционный процесс Лагранжа не сходится равномерно к $f(X)$, когда число узлов неограниченно возрастает.

В связи с этим отрицательным результатом возникает вопрос о замене интерполяционного процесса Лагранжа другим интерполяционным процессом, для которого уже существуют системы узлов, обеспечивающие равномерную сходимость нового интерполяционного процесса к любой непрерывной в K функции.

Пусть $\lambda_{n_1 n_2 \ldots n_k}(P)$ обозначает отношение произведения степеней полинома $P_{n_1 n_2 \ldots n_k}(f, X)$ относительно переменных $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ к числу его узлов. Очевидно, что в случае интерполяционного процесса Лагранжа $\lambda_{n_1 n_2 \ldots n_k}(L) = n_1 n_2 \ldots n_k \Big/ \prod_{j=1}^{k}(n_j + 1)$. Это отношение сколь угодно близко к 1 при достаточно больших $\{n_s\}_{s=1}^{k}$.

Естественно попытаться заменить интерполяционный процесс Лагранжа $L_{n_1 n_2 \ldots n_k}(f, X)$ таким новым равномерно сходящимся интерполяционным процессом $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}(f, X)$, для которого $\lambda_{n_1 n_2 \ldots n_k}(A)$ также сколь угодно близко к единице.

В одномерном случае указанная проблема была решена С. Н. Бернштейном [2] для матрицы узлов Чебышева*. В работе [3] результаты Бернштейна были распространены на некоторый класс матриц узлов интерполирования.

2°. В настоящей работе упомянутая проблема решается для случая многомерного пространства.

Пусть i-я компонента точки $X(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)})$ принимает значения $x_1^{(i)} < x_2^{(i)} < \ldots < x_{n_i+1}^{(i)}$, $-1 \leqslant x_j^{(i)} \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, n_i + 1$.

* Я хочу воспользоваться случаем, чтобы отметить, что результат Мерли [5] 1949 г. содержится как частный случай в работе С. Н. Бернштейна 1932 г. У Мерли, а также в реферате Фаварда [6] нет указаний на работу [2].

Система точек $\{(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_k}^{(k)})\}$ составляет интерполяционную систему узлов порядка $\prod_{j=1}^{k}(n_j+1)$. Интерполяционный полином Лагранжа для такой системы узлов имеет вид

$$L_{n_1 n_2 \ldots n_k}(f, X) = \sum_{j_1 j_2 \ldots j_k} f\left(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_k}^{(k)}\right) \prod_{s=1}^{k} l_{j_s}^{(n_s)}(x^{(s)}),$$

где $l_{j_s}^{(n_s)}(x^{(s)})$ — одномерный интерполяционный фундаментальный полином Лагранжа, построенный для узлов $-1 \leqslant x_1^{(s)} < x_2^{(s)} < \ldots < x_{n_s+1}^{(s)} \leqslant 1$, $1 \leqslant j_s \leqslant n_s + 1$. Суммирование производится по всевозможным комбинациям чисел $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

Интерполяционным процессом С. Н. Бернштейна для k-мерного пространства мы называем следующий способ интерполирования:

$$A_{n_1 n_2 \ldots n_k}(f, X) =$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \ldots j_k} f\left(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_k}^{(k)}\right) \prod_{s=1}^{k} \left[l_{j_s}^{(n_s)}(x^{(s)}) + (-1)^{j_s-1} l_{2p_s t_{j_s}}(x^{(s)})\right],$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — произвольные натуральные числа. Целое число t_{j_s} определяется однозначно из неравенств $2p_s(t_{j_s}-1) < j_s < 2p_s t_{j_s}$, $s = 1, 2, \ldots, k$. Суммирование производится по всевозможным комбинациям чисел $j_1, j_2, \ldots, j_k$. При этом j_s, $s = 1, 2, \ldots, k$, принимает всевозможные значения из множества чисел $1, 2, \ldots, n_s + 1$, за исключением чисел этого множества, кратных $2p_s$. Если $2p_s t_{j_s} > n_s$, то мы считаем $l_{2p_s t_{j_s}}^{(n_s)}(x^{(s)}) \equiv 0$, $s = 1, 2, \ldots, k$. Нетрудно видеть, что если $j_s \not\equiv 0 \pmod{2p_s}$, $s = 1, 2, \ldots, k$, то выполняется равенство

$$A_{n_1 n_2 \ldots n_k}(f, x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_k}^{(k)}) = f(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_k}^{(k)}),$$

следовательно, точка $(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_k}^{(k)})$ при $j_s \not\equiv 0 \pmod{2p_s}$, $s = 1, 2, \ldots, k$, является узлом. Если же хотя одно j_s будет кратно $2p_s$, то точка $(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_k}^{(k)})$ уже не будет узлом. Так например,

$$A_{n_1 \ldots n_k}(f, x_{2p_1 t_{s_1}}, \ldots, x_{2p_k t_{s_k}}) =$$

$$= \sum_{j_1 = 2p_1(t_{s_1}-1)+1}^{2p_1 t_{s_1}-1} \cdots \sum_{j_k = 2p_k(t_{s_k}-1)+1}^{2p_k t_{s_k}-1} (-1)^{j_1+\ldots+j_k-k} f(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_k}^{(k)}).$$

Число узлов полинома $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}(f, X)$ равно $\prod_{j=1}^{k}\left(n_j - \left[\frac{n_j}{2p_j}\right]\right)$. Поэтому при достаточно больших $p_1, p_2, \ldots, p_k$ $\lambda_{n_1 n_2 \ldots n_k}(A)$ будет сколь угодно близко к единице. Введем следующие обозначения:

$$\Delta_{n_s} = \max_{j_s = 1, 2, \ldots, n_s} \left[\left(x_{j_s+1}^{(s)} - x_{j_s}^{(s)}\right)\right], \quad s = 1, 2, \ldots, k.$$

Через $\sigma_{n_s}(a, b)$ мы обозначим количество чисел из множества $\{(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \ldots, x_{n_s+1}^{(s)}\}$, $1 \leqslant s \leqslant k$, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x_j^{(s)} \leqslant b$.

Теорема 1. *Пусть система точек* $\{(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_k}^{(k)})\}$, $1 \leqslant j_s \leqslant n_s + 1$, $n_s \to \infty$, $s = 1, 2, \ldots, k$, *удовлетворяет следующим условиям:*

А. $\Delta_{n_s} \to 0,\ n_s \to \infty,\ s = 1, 2, \ldots, k.$

Б. *В точке* $x_0^{(s)} \in [-1, 1],\ s = 1, 2, \ldots, k,$ *выполняются неравенства: при* $x_{j_s} < x_{j_s+1} \leqslant x_0^{(s)}$

$$\left| l_{j_s}\left(x_0^{(s)}\right) \right| \leqslant \left| l_{j_s+1}\left(x_0^{(s)}\right) \right|, \quad n_s > n_s^{(0)};$$

при $x_0^{(s)} \leqslant x_{j_s} < x_{j_s} + 1$

$$\left| l_{j_s}\left(x_0^{(s)}\right) \right| \geqslant \left| l_{j_s+1}\left(x_0^{(s)}\right) \right|, \quad n_s > n_s^{(0)},$$

где $\{n_s^{(0)}\}_{s=1}^{k}$ — *некоторые фиксированные натуральные числа.*

В. *Если* $\sigma_{n_s}\left(x_0^{(s)}, x_{j_s}\right) = h_s,$ *то* $\left| l_{j_s}\left(x_0^{(s)}\right) \right| \leqslant K\left(x_0^{(s)}\right) \varphi(h_s),\ s = 1, 2, \ldots, k$ $(n_s \geqslant n_s^{(0)}),$ *где* $K\left(x_0^{(s)}\right)$ — *неотрицательное конечное число,* $\varphi(h_s)$ — *произвольная неотрицательная функция, удовлетворяющая условию* $\varphi(h_s) \to 0$ *при* $h_s \to 0,\ s = 1, 2, \ldots, k.$

Тогда многомерный интерполяционный процесс С. Н. Бернштейна, построенный для функции $f\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}\right)$, *ограниченной в* K *и непрерывной в точке* $X_0 = \left(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(k)}\right)$, *сходится к* $f\left(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(k)}\right)$, *т. е.*

$$A_{n_1 n_2 \ldots n_k}(f, X_0) \to f(X_0), \quad n_s \to \infty, \quad s = 1, 2, \ldots, k. \tag{1}$$

Теорема 1 является обобщением моей теоремы ([3]) для многомерного пространства.

Замечание 1. Если имеют место условия А, в каждой точке K выполняются условия Б и В и

$$K\left(x^{(s)}\right) \leqslant m_s, \quad -1 \leqslant x^{(s)} \leqslant 1, \quad s = 1, 2, \ldots, k,$$

где $\{m_s\}_{s=1}^{k}$ — конечные числа, то для любой непрерывной в K функции выполняется равномерно соотношение (1) в K.

Отметим ход доказательства. Пусть

$$\prod_{s=1}^{k} \left[l_{j_s}\left(x_0^{(s)}\right) + (-1)^{j_s - 1} l_{2p_s t_{j_s}}\left(x_0^{(s)}\right) \right] = r_{j_1 j_2 \ldots j_k}(X_0).$$

Так как $\sum\limits_{j_1 j_2 \ldots j_k} r_{j_1 j_2 \ldots j_k}(X_0) = 1,$ то достаточно доказать, что выполняются соотношения

$$\sum_{j_1 j_2 \ldots j_k} \left| r_{j_1 j_2 \ldots j_k}(X_0) \right| = O(1) \quad \text{и} \quad \sum_{\rho\left(X_0, X_{j_1 j_2 \ldots j_k}\right) \geqslant \delta} \left| r_{j_1 j_2 \ldots j_k}(X_0) \right| = o(1) \tag{2}$$

при $n_s \to \infty,\ s = 1, 2, \ldots, k,$ где $\rho\left(X_0, X_{j_1 \ldots j_k}\right)$ обозначает расстояние между точками $X_0\left(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(k)}\right)$ и $X_{j_1 j_2 \ldots j_k}\left(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_k}^{(k)}\right)$ и $\delta > 0$ произвольно. Нетрудно доказать, что при выполнении условий А, Б, В из теоремы 1 (2) действительно выполняются.

Пользуясь результатами работы ([3]) и теоремой 1, можно доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть* $\{x_{j_s}\}_{j_s=1}^{n_s}$ *совпадают с корнями полинома Якоби* $J_{n_s}\left(x^{(s)}, \alpha_s^{(n_s)}, \beta_s^{(n_s)}\right),\ s = 1, 2, \ldots, k,$ *причем* $-1 \leqslant \alpha_s^{(n_s)} < 0,$ $-1 \leqslant \beta_s^{(n_s)} < 0.$

Тогда соотношение (1) *выполняется равномерно для любой непрерывной в K функции.*

3°. Рассмотрим интерполяционный процесс, определяемый по закону

$$N_{n_1 \ldots n_k}(f, X) = \sum_{j_1 \ldots j_k} \prod_{i=1}^{k} l_{j_i}\left(x^{(i)}\right) \frac{2 \sin\left(2h_i + 1\right) \arc \sin \frac{x^{(i)} - x_{j_i}^{(i)}}{2}}{\left(2h_i + 1\right)\left(x^{(i)} - x_{j_i}^{(i)}\right)} f\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_k}^{(k)}\right),$$

где h_i — целочисленная функция от n_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, удовлетворяющая неравенствам $0 < \delta_1 < 2h_i / n_i < \delta_2 < 1$; δ_1 и δ_2 — данные сколь угодно малые фиксированные числа. Суммирование производится по всевозможным комбинациям чисел $j_1, j_2, \ldots, j_k$, $1 \leqslant j_s \leqslant n_s$, $s = 1, 2, \ldots, k$. Очевидно, что $\lambda_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ сколь угодно близко к 1, если только δ_2 достаточно мало. Этот интерполяционный процесс для одномерного случая и узлов Чебышева был введен в теорию интерполирования С. Н. Бернштейном [2] и распространен на некоторый класс матриц узлов в [4].

Теорема 3. *Пусть система узлов* $\left\{\left(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_k}^{(k)}\right)\right\}$, *где* $x_{j_s}^{(s)}$ *принимает значения* $-1 \leqslant x_1^{(s)} < x_2^{(s)} < \ldots < x_{n_s}^{(s)} \leqslant 1$, *удовлетворяет следующим условиям: для любого интервала* $[-1 + \varepsilon_i, 1 - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, *существует конечное положительное число* c_i, *зависящее только от* ε_i, *такое, что*

$$\sum_{j_i=1}^{n_i} \left[l_{j_i}^{(n_i)}\left(x^{(i)}\right) \right]^2 \leqslant c_i, \quad x^{(i)} \in [-1 + \varepsilon_i, 1 - \varepsilon_i], \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad n_i \to \infty.$$

Пусть $f(X)$ — любая непрерывная в K функция. Тогда для любой внутренней точки $X \in K$ выполняется соотношение

$$N_{n_1 n_2 \ldots n_k}(f, X) \to f(X), \quad n_i \to \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{3}$$

Соотношение (3) *выполняется равномерно в любом параллелепипеде* $-1 + \varepsilon_i \leqslant x^{(i)} \leqslant 1 - \varepsilon_i$, $0 < \varepsilon_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство проводится как в заметке [4].

Теорема 4. *Пусть* $\{x_{j_s}^{(s)}\}_{j_s=1}^{n_s}$ *совпадает с корнями полинома Якоби* $J_{n_s}\left(x^{(s)}, \alpha_s^{(n_s)}, \beta_s^{(n_s)}\right)$, $\alpha_s^{(n_s)} \geqslant -1$, $\beta_s^{(n_s)} \geqslant -1$, $n_s \to \infty$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$. *Пусть $f(X)$ — произвольная непрерывная в K функция. Тогда в каждой внутренней точке $X \in K$ выполняется* (3). *Сходимость равномерная в параллелепипеде* $-1 + \varepsilon_i \leqslant x^{(i)} \leqslant 1 - \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Теорема 5. *Пусть* $\{x_{j_s}^{(s)}\}_{j_s=1}^{n_s}$ *совпадает с корнями ортогональной системы полиномов с весом* $p_{n_s}\left(x^{(s)}\right)$, $n_s \to \infty$, $s = 1, 2, \ldots, k$, *причем* $0 < m_s < p_{n_s}\left(x^{(s)}\right) \sqrt{1 - \left(x^{(s)}\right)^2} < M_s$, $s = 1, 2, \ldots, k$.

Тогда для любой непрерывной в K функции $f(X)$ в каждой внутренней точке $X \in K$ выполняется соотношение (3). *Сходимость равномерная в параллелепипеде* $-1 + \varepsilon_i \leqslant x^{(i)} \leqslant 1 - \varepsilon_i$.

Поступило
30 VIII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, ДАН, **59**, № 5 (1948). [2] С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, **4**, 6, 49 (1932). [3] Д. Л. Берман, ДАН, **50**, № 3 (1945). [4] Д. Л. Берман, ДАН, **51**, № 1 (1946). [5] L. Merli, Atti Acad. Naz. Lincei Red. Cl. Sc. Fis. mat., **7**, 212 (1949). [6] J. Favard, Math. Rev., No. 10 (1950).