Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 1

МАТЕМАТИКА

В. П. БАСОВ

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОГО КЛАССА СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОДНОМ СОМНИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 8 IX 1951)

Рассмотрим следующую систему линейных однородных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{\sigma=1}^{n}\left(p_{s\sigma}+\frac{1}{t^{\gamma}}q_{s\sigma}(t)\right)x_{\sigma}\quad(s=1,\ldots,n),\tag{1}$$

где γ и $p_{s\sigma}$ $(s,\sigma=1,\ldots,n)$ — вещественные постоянные, причем $\gamma>0$, а $q_{s\sigma}(t)$ $(s,\sigma=1,\ldots,n)$ — вещественные функции вещественной переменной t, определенные, непрерывные и ограниченные при всех $t\geqslant T>0$.

Цель настоящей работы заключается в исследовании устойчивости в смысле Ляпунова нулевого решения $x_1=\ldots=x_n=0$ системы (1) при $t\to+\infty$ в предположении, что характеристическое уравнение, отвечающее матрице $\|p_{s\sigma}\|$, имеет один нулевой корень, а все остальные его корни обладают отрицательными вещественными частями.

Как известно, при сделанных предположениях систему (1) с помощью неособенной линейной подстановки с постоянными вещественными коэффициентами всегда можно преобразовать так, чтобы имели место равенства

$$p_{s1}=p_{1s}=0\quad(s=1,\ldots,n).$$

Допустив, что указанное преобразование (если в нем была надобность) выполнено, мы можем систему (1) записать следующим образом:

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{1}{t^{\gamma}}\sum_{\sigma=1}^{n}q_{s\sigma}(t)\,x_{\sigma},\tag{2}$$

$$\frac{dx_s}{dt}=\frac{1}{t^{\gamma}}q_{s1}(t)\,x_1+\sum_{\sigma=2}^{n}\left(p_{s\sigma}+\frac{1}{t^{\gamma}}q_{s\sigma}(t)\right)x_{\sigma}\quad(s=2,\ldots,n).$$

При этом уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{22}-\varkappa & \cdots\cdots & p_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\\ p_{n2} & \cdots\cdots & p_{nn}-\varkappa\end{vmatrix}=0\tag{3}$$

будет иметь корни только с отрицательными вещественными частями, так что, если обозначить их через $\varkappa_s = -\lambda_s + i\mu_s$ $(s = 2, \ldots, n)$, то будем иметь $\lambda_s > 0$ $(s = 2, \ldots, n)$.

Ранее нами было установлено [1], что в рассматриваемом случае система (2) имеет решение вида

$$x_1^{(1)} = e^{\psi(t)}(1 + v_1(t)), \quad x_s^{(1)} = e^{\psi(t)} v_s(t) \quad (s = 2, \ldots, n), \tag{4}$$

в котором $v_s(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$ суть ограниченные функции t, стремящиеся к нулю при $t \to +\infty$,

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } \gamma > 1 \\ \int\limits_T^t \frac{q_{11}(t)}{t^\gamma}\,dt & \text{при } \frac{1}{2} < \gamma \leqslant 1, \\ \int\limits_T^t \frac{1}{t^\gamma}\left(q_{11}(t) + \sum\limits_{l=1}^{k-1}\sum\limits_{\sigma=2}^{n} q_{1\sigma}(t)\frac{a_\sigma^{(l)}(t)}{t^{l\gamma}}\right)dt & \text{при } 0 < \gamma \leqslant \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{5}$$

где k — целое число, удовлетворяющее неравенству

$$k\gamma \leqslant 1 < (k+1)\gamma,$$

а $a_\sigma^{(l)}(t)$ — ограниченные функции t, способ построения которых указан в работе [1].

Так как в выражениях (4) функции $v_s(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то всегда можно выбрать столь большое число $t_0 \geqslant T$, что при всех $t \geqslant t_0$ будет $|v_1(t)| < 1/2$. Далее будем рассматривать только такие значения t.

Используя решение (4), сделаем в системе (2) замену переменных, положив

$$x_1 = x_1^{(1)} z_1, \quad x_s = x_s^{(1)} z_1 + z_s \quad (s = 2, \ldots, n), \tag{6}$$

где $z_1, \ldots, z_n$ — новые неизвестные функции. В результате указанной замены система (2) преобразуется к виду

$$\begin{gathered} \frac{dz_1}{dt} = \sum_{\sigma=2}^{n} r_{1\sigma}(t)\, z_\sigma, \\ \frac{dz_s}{dt} = \sum_{\sigma=2}^{n}\left(p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\gamma} r_{s\sigma}(t)\right) z_\sigma \quad (s = 2, \ldots, n), \end{gathered} \tag{7}$$

где положено

$$\begin{gathered} r_{1\sigma}(t) = \frac{q_{1\sigma}(t)}{t^\gamma x_1^{(1)}} = e^{-\psi(t)}\frac{q_{1\sigma}(t)}{t^\gamma(1 + v_1(t))} \quad (\sigma = 2, \ldots, n), \\ r_{s\sigma}(t) = q_{s\sigma}(t) - q_{1\sigma}(t)\frac{x_s^{(1)}}{x_1^{(1)}} = q_{s\sigma}(t) - \frac{v_s(t)\, q_{1\sigma}(t)}{1 + v_1(t)} \quad (s, \sigma = 2, \ldots, n). \end{gathered} \tag{8}$$

Из выражений (8) видим, что коэффициенты системы (7) определены и непрерывны при всех $t \geqslant t_0$, при этом $r_{s\sigma}(t)$ $(s, \sigma = 2, \ldots, n)$ ограничены, что же касается коэффициентов $r_{1\sigma}(t)$ $(\sigma = 2, \ldots, n)$ первого из уравнений (7), то они, вообще говоря, неограничены, однако характеристичное число [2] каждого из этих коэффициентов равно нулю, так как порядок роста функции $e^{-\psi(t)}$ не может быть больше, чем $e^{at^{1-\gamma}}$ (a — постоянная), что следует из выражений (5).

Последние $n-1$ уравнений (7) не содержат z_1 и образуют систему, не зависящую от первого уравнения (7). Эта система правильная, и характеристичными числами ее являются взятые с обратным знаком вещественные части корней уравнения (3), т. е. числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ [3]. Пусть

$$z_2 = u_2(t), \ldots, z_n = u_n(t) \tag{9}$$

есть произвольное решение указанной системы. Характеристичное число ν этого решения положительно, ибо $\nu \geqslant \min\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} > 0$, следовательно, $u_s(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ $(s = 2, \ldots, n)$. Подставляя функции (9) в первое уравнение (7) и интегрируя, найдем

$$z_1 = c + u_1(t),$$

где

$$u_1(t) = \int\limits_{+\infty}^{t} \sum_{\sigma=2}^{n} r_{1\sigma}(t)\, u_\sigma(t)\, dt,$$

а c — произвольная постоянная.

Написанный интеграл существует, и следовательно, $u_1(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Возвращаясь теперь к переменным x_s, получим соответствующее решение исходной системы (2). Это решение, согласно (6) и (4), представится в следующем виде:

$$x_1 = e^{\psi(t)}(1 + v_1(t))(c + u_1(t)),$$

$$x_s = e^{\psi(t)} v_s(t)(c + u_1(t)) + u_s(t) \quad (s = 2, \ldots, n).$$

Видим, что если $e^{\psi(t)}$ — функция неограниченная, то при $c \neq 0$ и полученное решение будет также неограничено. Отсюда вытекает следующая теорема:

Теорема. *Для того чтобы нулевое решение системы* (2) *было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы функция* $\psi(t)$, *определяемая выражением* (5), *удовлетворяла условию*

$$\sup_{t \geqslant t_0} \psi(t) < +\infty;$$

при этом устойчивость будет асимптотическая тогда и только тогда, когда $\psi(t) \to -\infty$ *при* $t \to +\infty$.

Как следствие из теоремы, получаем известный ранее результат, что если $\gamma > 1$, то нулевое решение системы (2) всегда устойчиво, но не асимптотически.

Таким образом, доказанная теорема полностью исчерпывает поставленный вопрос об устойчивости.

Совсем недавно вопрос об устойчивости решений системы (1) при тех же предположениях, что и у нас, был исследован Б. П. Демидовичем [4]. Он получил следующий достаточный признак устойчивости:

Если $0 < \gamma \leqslant 1$ и если в системе, приведенной к виду (2), коэффициент $q_{11}(t)$ удовлетворяет условию

$$q_{11}(t) < -c_0 \quad (t_0 \leqslant t < +\infty),$$

где c_0 — некоторая постоянная, то нулевое решение равномерно устойчиво.

Теперь мы видим, что в этом случае устойчивость будет не только равномерная, но и асимптотическая. Кроме того, из полученной теоремы непосредственно вытекает ряд более сильных достаточных признаков устойчивости.

Замечание. К рассмотренному случаю приводится и вопрос об исследовании устойчивости нулевого решения системы:

$$\frac{dx_s}{dt} = t^{\alpha} \sum_{\sigma=1}^{n} \left(p_{s\sigma} + \frac{1}{t^{\beta}} q_{s\sigma}(t) \right) x_{\sigma} \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{10}$$

где α и β — произвольные положительные вещественные числа, а относительно $p_{s\sigma}$ и $q_{s\sigma}(t)$ имеют место те же предположения, что и для системы (1).

Действительно, заменой независимой переменной $\tau = t^{\alpha+1}$ система (10) сразу же сводится к виду (1), причем $\gamma = \frac{\beta}{\alpha+1}$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
5 IX 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Басов, ДАН, 80, № 3 (1951). [2] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, М.— Л., 1950. [3] O. Perron, Math. Zs., 29, 129 (1928). [4] Б. П. Демидович, Матем. сборн., 28, (70), 659 (1951).