Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 2

ФИЗИКА

А. И. АХИЕЗЕР и Г. Я. ЛЮБАРСКИЙ

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЫ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 18 VII 1951)

1. Обычно рассматриваются малые колебания плазмы; однако в целом ряде вопросов, например, в вопросе о взаимодействии пучков заряженных частиц с плазмой, линейного приближения недостаточно; поэтому представляет интерес развитие нелинейной теории плазменных колебаний. Построение такой теории представляет большие математические трудности.

В настоящей заметке мы решаем простейшую одномерную нелинейную задачу, а именно, рассматриваем продольные колебания в неограниченной плазме при абсолютном нуле. В этом случае состояние плазмы вместо обычно применяемой функции распределения может характеризоваться плотностью электронов $n(\mathbf{r}, t)$. Взамен кинетического уравнения можно исходить из уравнения движения для скорости электронов

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \operatorname{grad}\frac{e}{m}\varphi, \tag{1}$$

где φ — потенциал электрического поля, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta\varphi = 4\pi e(n - n_+), \tag{2}$$

e — заряд электрона, m — его масса и n_+ — плотность ионов, которые мы считаем неподвижными. (В (1) мы пренебрегли действием магнитного поля, считая, что $v \ll c$). Присоединив к (1), (2) уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) = 0, \tag{3}$$

получим полную систему уравнений, определяющих состояние плазмы.

2. Рассмотрим одномерное движение вдоль оси x ($v_x = v$, $v_y = v_z = 0$) и будем искать решения (1), (2), (3), зависящие от комбинации $x - Vt$, где V — некоторая константа. Обозначая производную по этой переменной штрихом, получим

$$\begin{gathered}(nv)' - Vn' = 0,\\ -Vv' + vv' = \frac{e}{m}\varphi',\\ \varphi'' = 4\pi e(n - n_+),\end{gathered} \tag{4}$$

откуда

$$n(V-v)=j=pV=\mathrm{const},$$

$$(V-v)^2=\frac{2e}{m}\varphi. \tag{5}$$

Вводя безразмерные величины

$$\frac{v}{V}=u,\quad \frac{2e\varphi}{mV^2}=\psi,\quad \frac{n}{|p|}=\nu,\quad \frac{n_+}{|p|}=\nu_+,$$

$$\sqrt{\frac{8\pi e^2}{mV^2}|p|}\,(x-Vt)=\xi,$$

перепишем (5) и (2) в виде

$$\nu(1-u)=\operatorname{sgn} p,$$

$$(1-u)^2=\psi, \tag{6}$$

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2}=\nu-\nu_+.$$

Замечая, что $\nu=+\psi^{-1/2}$, и интегрируя последнее уравнение, найдем

$$\frac{d\psi}{g\xi}=\pm\sqrt{2\nu_+\left[\beta^2-\left(\psi^{1/2}-\frac{1}{\nu_+}\right)^2\right]},\quad \beta=\mathrm{const}. \tag{7}$$

Мы видим, что ψ ограничено и заключено между $\psi_{\min}=\left(\frac{1}{\nu_+}-\beta\right)^2$ и $\psi_{\max}=\left(\frac{1}{\nu_+}+\beta\right)^2$. Легко видеть, что ψ представляет собой периодическую (но не гармоническую) функцию ξ. Период этой функции равен, очевидно,

$$\xi_0=2\int\limits_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}}\frac{d\psi}{\sqrt{2\nu_+\left[\beta^2-\left(\psi^{1/2}-\frac{1}{\nu_+}\right)^2\right]}}=2\pi\sqrt{\frac{2}{\nu_+^3}}. \tag{8}$$

Интегрируя (7), получим

$$\sqrt{\frac{\nu_+^3}{2}}\,\xi=\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{\psi^{1/2}-\frac{1}{\nu_+}}{\beta}-\sqrt{\beta^2-\left(\psi^{1/2}-\frac{1}{\nu_+}\right)^2} \tag{9}$$

(ξ отсчитывается от точки, где $\psi=\psi_{\min}$). Это соотношение определяет ψ, т. е. потенциал, как функцию ξ, т. е. $x-Vt$.

3. Легко убедиться, что решение (9) отвечает скомпенсированному заряду плазмы; действительно, средняя плотность электронов равна

$$\bar{\nu}=\overline{\psi^{-1/2}}=\frac{2}{\xi_0}\int\limits_{\psi=\psi_{\min}}^{\psi=\psi_{\max}}\psi^{-1/2}\,d\xi=\frac{2}{\xi_0}\int\limits_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}}\frac{\psi^{-1/2}}{d\psi/d\xi}\,d\psi.$$

Подставив сюда выражение (7), найдем

$$\bar{\nu} = \nu_+, \tag{10}$$

т. е. $\bar{n} = n_+$.

Для того чтобы магнитное поле и магнитная энергия в плазме не были бесконечными, мы потребуем, чтобы средняя плотность электронного тока равнялась нулю

$$\overline{nv} = 0. \tag{11}$$

Условие (11) вместе с (5) приводит к выводу, что

$$p = \bar{n} = n_+. \tag{12}$$

Отсюда и из (6) легко заключить, что $u < 1$, т. е. что скорость частиц не превосходит скорости волны V.

Воспользовавшись этим значением p, перепишем соотношение (9) в первоначальных переменных

$$\sqrt{\frac{4\pi e^2 n_+}{m}}\left(\frac{x}{V} - t\right) = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{\beta}\left(\sqrt{\frac{2e\varphi}{mV^2}} - 1\right) - \\ - \sqrt{\beta^2 - \left(\sqrt{\frac{2e\varphi}{mV^2}} - 1\right)^2}. \tag{13}$$

Соотношение (13) содержит две произвольные постоянные — скорость распространения волны V и величину β, которая, очевидно, представляет собой максимум отношения скорости частиц к скорости распространения волны

$$\beta = \frac{v_{\max}}{V}. \tag{14}$$

Из (13) вытекает интересный вывод: частота нелинейных колебаний плазмы (т. е. коэффициент при t в левой части (13)) совпадает с частотой линейных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi n_+ e^2}{m}}.$$

Заметим, что, если бы мы считали $n_+ = 0$, то взамен (9) получили бы

$$\xi = -2C\left(C + \psi^{1/2}\right)^{1/2} - {}^2/_3\left(C + \psi^{1/2}\right)^{3/2}$$

и, следовательно, ψ было бы неограниченной функцией ξ.

В заключение мы благодарим акад. Л. Д. Ландау за интерес к работе и ценную дискуссию.

Поступило
25 VI 1951