

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. Г. МИРИМАНОВ

**СОПРОТИВЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ДИПОЛЯ ВБЛИЗИ ХОРОШО  
ПРОВОДЯЩЕГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ**

(Представлено академиком Б. А. Введенским 30 VII 1951)

1. Введем систему сфероидальных координат, изображенную на рис. 1. Связь сфероидальных координат  $\xi, \eta, \Phi$  с прямоугольными координатами  $x, y, z$ , с цилиндрическими  $z, r, \varphi$  и со сферическими  $R, \vartheta, \varphi$  определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= f[(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2} \cos \varphi = f \sin h\psi \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= f[(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2} \sin \varphi = f \sin h\psi \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= f\xi\eta = f \cos h\psi \cos \vartheta; \end{aligned} \quad (1)$$

$$r = f[(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2}, \quad \Phi = \Phi, \quad z = f\xi\eta; \quad (2)$$

$$R = f(\xi^2 + \eta^2 - 1)^{1/2}, \quad \cos \vartheta = \xi\eta / (\xi^2 + \eta^2 - 1)^{1/2}, \quad \Phi = \Phi. \quad (3)$$

Координатные поверхности в принятой системе координат представляют собой семейства взаимно ортогональных вытянутых эллипсоидов и двуполостных гиперboloидов вращения вокруг оси  $z$ . Расстояние между фокусами конфокального семейства вытянутых эллипсоидов вращения  $\xi = \text{const}$  и двуполостных гиперboloидов вращения  $\eta = \text{const}$  обозначено через  $2f$ . В число семейства эллипсоидов входит поверхность рассматриваемого эллипсоида  $\xi = \xi_0$ . Полуоси этого эллипсоида равны  $a = f\xi_0$ ,  $b = \xi_0^2 - 1$ , а эксцентриситет  $c = 1/\xi_0$ . Значения  $\xi$  меняются в пределах  $1 \leq \xi < \infty$ . В первом случае эллипсоид вращения превращается в линию, соединяющую фокусы; во втором случае, при условии, что  $f$  стремится к нулю так, что  $\lim f\xi \rightarrow R$  остается конечным, эллипсоид превращается в шар радиуса  $R$ . Поэтому  $\xi$  часто называется «радиальной» координатой. Переменные  $\eta$  и  $\Phi$  меняются в пределах  $-1 \leq \eta \leq 1$ ,  $0 \leq \Phi \leq 2\pi$ . Координату  $\eta$  иногда называют «угловой» координатой, так как при  $\xi \rightarrow \infty$   $\cos \vartheta \rightarrow \eta$ .

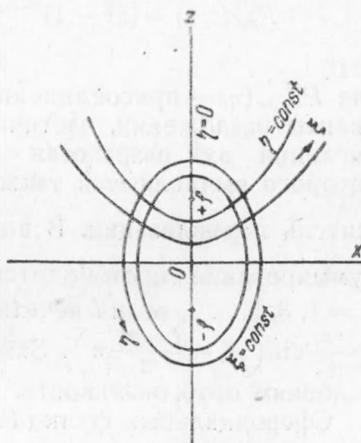


Рис. 1

В соответствии с принятой системой координат волновое уравнение можно представить в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (\xi^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] + \\ & + \left[ \frac{1}{(1 - \eta^2)} + \frac{1}{(\xi^2 - 1)} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k^2 f^2 (\xi^2 - \eta^2) \psi = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В таком виде волновое уравнение допускает разделение переменных. Действительно, положив

$$\psi(\xi, \eta, \Phi) = U(\xi) V(\eta) \Phi(\Phi), \quad (5)$$

получим:

$$\frac{d}{d\xi} \left[ (1 - \xi^2) \frac{dU}{d\xi} \right] + U \left( -\frac{m^2}{1 - \xi^2} - k^2 f^2 \xi^2 + \lambda \right) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{dV}{d\eta} \right] + V \left( \frac{-m^2}{1 - \eta^2} - k^2 f^2 \eta^2 + \lambda \right) = 0, \quad \frac{d^2 \Phi}{d\Phi^2} = -m^2 \Phi; \quad (7)$$

$m$  и  $\lambda$  — постоянные разделения, значения которых выяснены ниже.

Уравнения типа (6) представляют собой уравнения Ляме, решениями которых являются волновые функции Ляме. В случае  $k = 0$  эти уравнения переходят в уравнения Лапласа, легко разрешимые с помощью полиномов Лежандра. Вводя обозначения  $U = u(1 - \xi^2)^{m/2}$  и  $V = v(1 - \eta^2)^{m/2}$ , их можно привести к виду

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 u}{d\xi^2} + 2(m+1)\xi \frac{du}{d\xi} + (\lambda + m^2 - k^2 f^2 \xi^2) u = 0. \quad (8)$$

Эта форма уравнений Ляме, предложенная Маклореном, во многих случаях оказывается более удобной и достаточно хорошо изученной. Решениями уравнений типа (8) являются сфероидальные функции первого и второго рода. Сфероидальные функции первого рода имеют вид:

$$S_{ml}^{(1)}(c, \eta) = \sum_{n=0, 1}^{\infty} d_n^l P_{n+m}^m(\eta), \quad (9)$$

$$R_{ml}^{(1)}(c, \xi) = (\xi^2 - 1)^{m/2} k_l(c, \xi)^{-m} \sum_{n=0, 1}^{\infty} a_n^l \sqrt{\frac{\pi}{2c\xi}} J_{n+m+1/2}(c, \xi), \quad (10)$$

где  $P_{n+m}^m(\eta)$  — присоединенная функция Лежандра, а  $d_n^l$  — коэффициенты разложения, частично табулированные в работе (1). Для вычисления их разработан метод непрерывных дробей, с помощью которого вычисляются также и постоянные разделения.  $k_l(c, \xi)$  — множитель нормализации. В выражениях (9) и (10) знак  $\sum_{n=0, 1}^{\infty}$  означает, что суммирование производится по  $n = 0, 2, 4, \dots$ , если  $l$  четное, и по  $n = 1, 3, 5, \dots$ , если  $l$  нечетное. При больших значениях  $c\xi$   $R_{ml}^{(1)}(c, \xi) \rightarrow \rightarrow \frac{1}{c\xi} \sin\left(c\xi - \frac{l-m}{2}\pi\right)$ . Заметим, что функции  $S_{ml}^{(1)}(c, \eta)$  удовлетворяют условиям ортогональности.

Сфероидальные функции второго рода имеют вид:

$$S_{ml}^{(2)}(c, \eta) = \sum_{n=0, 1}^{\infty} d_n^l Q_{n+m}^m(\eta),$$

$$R_{ml}^{(2)}(c, \xi) = (\xi^2 - 1)^{m/2} k_l(c, \xi)^{-m} \sum_{n=0, 1}^{\infty} a_n^l \sqrt{\frac{\pi}{2c\xi}} N_{n+m+1/2}(c, \xi). \quad (11)$$

Здесь  $Q_{n+m}^m(\eta)$  — присоединенная функция Лежандра второго рода;  $N_{n+m+1/2}(c, \xi)$  — функция Бесселя второго рода; при  $c\xi \rightarrow \infty$   $R_{ml}^{(2)}(c, \xi) \rightarrow \rightarrow -\frac{1}{c\xi} \cos\left(c\xi - \frac{l+m}{2}\pi\right)$ .

Решениями уравнений типа (8) являются также функции, представляющие собой линейную комбинацию двух независимых решений первого и второго рода:

$$S_{ml}^{(3)} = S_{ml}^{(1)} + iS_{ml}^{(2)}, \quad S_{ml}^{(4)} = S_{ml}^{(1)} - iS_{ml}^{(2)}; \quad (12)$$

$$R_{ml}^{(3)} = R_{ml}^{(1)} + iR_{ml}^{(2)}, \quad R_{ml}^{(4)} = R_{ml}^{(1)} - iR_{ml}^{(2)}. \quad (13)$$

Таким образом, общее решение волнового уравнения (4) может быть написано в виде:

$$\psi(\xi, \eta, \varphi) = R_{ml}(c, \xi) S_{ml}(c, \eta) e^{\pm im\varphi}, \quad (14)$$

где под  $R_{ml}(c, \xi)$  и  $S_{ml}(c, \eta)$  следует подразумевать любое из указанных выше решений. Решение (14) охватывает весь комплекс задач, связанных с колебаниями как внутри эллипсоида вращения, так и в пространстве, его окружающем. В каждом отдельном случае надлежит сделать выбор соответствующих классов функций  $R_{ml}$  и  $S_{ml}$ , отвечающих условиям рассматриваемой задачи. Этот выбор должен быть различен для внутренней части проводящего эллипсоида и для бесконечно протяженного диэлектрика, его окружающего. Внутри эллипсоида, например, следует применить радиальные функции, которые для всех значений  $\xi$ , находящихся в пределах  $1 \leq \xi \leq \xi_0$ , остаются конечными. Такими функциями являются функции первого рода. Во внешнем пространстве радиальные функции должны удовлетворять условиям излучения и при  $\xi \rightarrow \infty$ , наоборот, исчезать как  $e^{-ikr}/r$ . Этим условиям удовлетворяют функции четвертого рода.

2. Определим электромагнитное поле, создаваемое электрическим диполем, расположенным на оси симметрии эллипсоида вращения. Ввиду того, что рассматриваемая нами отражающая поверхность обладает круговой симметрией, поле определяется одной компонентой вектора Герца, параллельной оси возбуждающего поле диполя. Следовательно:

$$\text{div } \bar{\Pi} = i_z \text{grad } \Pi(\xi, \eta), \quad (15)$$

$$\text{grad } \Pi(\xi, \eta) = i_\xi \frac{1}{f} \left( \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2} \right)^{1/2} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} + i_\eta \frac{1}{f} \left( \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} \right)^{1/2} \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} + i_\varphi \frac{1}{f [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2}} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, \quad (16)$$

$$i_z = -\frac{1}{f} \left( \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2} \right)^{1/2} i_\xi + \frac{1}{f} \left( \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} \right)^{1/2} i_\eta,$$

$$i_x = \frac{1}{f} \left( \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} \right)^{1/2} \cos \varphi \cdot i_\xi + \frac{1}{f} \left( \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2} \right)^{1/2} \cos \varphi \cdot i_\eta - \sin \varphi \cdot i_\varphi, \quad (17)$$

$$i_y = \frac{1}{f} \left( \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} \right)^{1/2} \sin \varphi \cdot i_\xi + \frac{1}{f} \left( \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2} \right)^{1/2} \sin \varphi \cdot i_\eta + \cos \varphi \cdot i_\varphi,$$

$$\text{div } \bar{\Pi} = \frac{[-(\xi^2 - 1) \Pi_\xi + (1 - \eta^2) \Pi_\eta]}{f(\xi^2 - \eta^2)}, \quad (18)$$

и компоненты электрического и магнитного поля могут быть написаны в виде

$$E_\eta = \frac{1}{f} \left( \frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} \right)^{1/2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{-(\xi^2 - 1) \Pi_\xi + (1 - \eta^2) \Pi_\eta}{f(\xi^2 - \eta^2)} \right] + k^2 \Pi \right\}, \quad (19)$$

$$H_\varphi = i\omega \varepsilon \frac{[(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2}}{f(\xi^2 - \eta^2)} (\Pi_\eta + \Pi_\xi). \quad (20)$$

Положим  $\Pi = \Pi^0 + \Pi'$ , где  $\Pi^0$  соответствует падающему, а  $\Pi'$  — отраженному полю. Выражение для падающей сферической волны, исходящей из точки  $(x', y', z')$ , в сфероидальных координатах имеет вид:

$$\Pi^0 = \frac{e^{ikR}}{R} = 2ik \sum_{m,n} (2 - \delta_{0m}) \frac{c^{2m}}{N_{mn}} \cos[m(\varphi - \varphi')] \psi'_{mn}(k; \xi, \eta) \psi^3_{mn}(k; \xi', \eta'), \quad (21)$$

где

$$\psi'_{mn}(k; \xi, \eta) = [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{m/2} S_{l'mn}(c, \eta) R_{l'mn}(c, \xi), \quad (22)$$

$$\psi^3_{mn}(k; \xi, \eta) = [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{m/2} S_{l'mn}(c, \eta) R_{l'mn}^{(3)}(c, \xi), \quad (23)$$

$$N = \sum_k \frac{2(2m+k)!}{(2m+2k+1)k!} (a_k^{mn})^2, \quad (24)$$

$$R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2. \quad (25)$$

Формула (21) справедлива для  $\xi' > \xi$ ; в том случае, когда  $\xi' < \xi$ , в (21) следует поменять местами аргументы  $\xi, \eta$ , и  $\xi', \eta'$ . Волна, отраженная от эллипсоида вращения, определяется выражением

$$\Pi' = \sum_{m,n} A_m S_{l'mn}^{(1)}(\eta) R_{l'mn}^{(4)}(\xi). \quad (26)$$

Здесь  $A_m$  — постоянная, подлежащая определению на основании граничных условий на поверхности эллипсоида. Из (21) и (26) в случае диполя, расположенного на оси симметрии эллипсоида, получим:

$$\Pi = \sum_{m,n} \left\{ 2ik(2 - \delta_{0m}) \frac{c^{2m}}{N_{mn}} \psi'_{mn}(k; \xi', \eta') \psi^3_{mn}(k; \xi, \eta) + A_m S_{l'mn}^{(1)}(\eta) R_{l'mn}^{(4)}(\xi) \right\}. \quad (27)$$

Подставляя выражение (27) в (19) и (20), найдем  $E_\eta$  и  $H_\varphi$ , необходимые для вычисления сопротивления излучения диполя.

3. Перейдем к расчету сопротивления излучения рассматриваемой системы. Окружим эллипсоид вращения и диполь вблизи его поверхности конфокальным сфероидом с эксцентриситетом  $1/\xi$ . Мощность, излучаемая рассматриваемой системой в пространство, будет равна интегралу вектора Умова — Пойтинга по поверхности сфероида:

$$P_\Sigma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d\eta h_\varphi h_\eta E_\eta H_\varphi^*, \quad (28)$$

где  $H_\varphi^*$ , как обычно, означает комплексно-сопряженную величину. Подставляя в последнее выражение значения  $E_\eta$  и  $H_\varphi^*$ , получим:

$$P_\Sigma = \frac{i\omega\varepsilon(\xi^2 - 1)\pi}{f} \int_{-1}^1 \frac{(\eta^2 - 1)(\Pi_\xi - \Pi_\eta)}{(\xi^2 - \eta^2)} \times \\ \times \left\{ \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{-(\xi^2 - 1)\Pi_\xi + (1 - \eta^2)\Pi_\eta}{f(\xi^2 - \eta^2)} \right] + k^2 \Pi \right\} d\eta, \quad (29)$$

откуда сопротивление излучения  $R_\Sigma$  находится делением выражения (29) на квадрат тока в диполе  $I^2$ .

4. В том случае, когда диполь расположен перпендикулярно оси симметрии эллипсоида, например вдоль оси  $x$ , мощность, излучаемая рассматриваемой системой в пространство через поверхность окружающего систему конфокального сфероида, и сопротивление излучения диполя могут быть найдены аналогичным образом.

Институт автоматики и телемеханики  
Академии наук СССР

Поступило  
30 VI 1951

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Stratton, Morse, Chu, Hutner, Elliptic Cylinder and Spheroidal Wave Functions, 1941.