Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 2

АСТРОНОМИЯ

Д. А. ФРАНК-КАМЕНЕЦКИЙ

НЕАДИАБАТИЧЕСКИЕ ПУЛЬСАЦИИ В ЗВЕЗДАХ

(Представлено академиком Н. Н. Семеновым 23 VII 1951)

В общем случае пульсации звезды описываются системой из двух уравнений:
механическое уравнение

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + g; \tag{1}$$

тепловое уравнение

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{c_v\rho}\operatorname{div}\lambda\operatorname{grad}T + \varepsilon\right), \tag{2}$$

где S — энтропия, λ — лучистая теплопроводность; остальные обозначения общеприняты.

Рассмотрим поведение пульсаций близ поверхности звезды, где их нельзя считать адиабатическими. Введем лагранжеву координату x, определяющую равновесное положение данного элемента массы и направленную от поверхности внутрь.

Близ поверхности звезды, где кривизной, световым давлением и выделением энергии можно пренебречь, стационарное распределение температур и плотностей легко находится из условий постоянства теплового потока q_0 и ускорения силы тяжести g_0:

$$\lambda_0\frac{dT_0}{dx} = q_0 = \text{const}, \quad \frac{1}{\rho_0}\frac{dp_0}{dx} = g_0 = \text{const},$$

где индекс 0 обозначает состояние равновесия, откуда

$$\frac{d\ln p_0}{d\ln T_0} = \text{const}\cdot\lambda_0. \tag{3}$$

Если зависимость лучистой теплопроводности от температуры и плотности может быть выражена степенным законом типа

$$\lambda \backsim T^n\rho^{-s} \tag{4}$$

с произвольными показателями n и s и если температура и давление одновременно обращаются в нуль на поверхности звезды, то (3) дает степенную связь между p_0 и T_0, которая сводится к условию

$$\lambda_0 = \text{const},$$

т. е.

$$\rho_0 \backsim T_0^{\alpha}, \tag{5}$$

где $\alpha = n/s$. Численное значение α как для поглощающих, так и для рассеивающих звезд близко к 3.

Таким образом, стационарное распределение температур и плотностей близ поверхности звезды имеет вид:

$$T_0 = ax, \tag{6}$$

$$\rho_0 = bx^\alpha. \tag{7}$$

Выберем в качестве переменных, характеризующих изменение состояния данного элемента массы в процессе колебания, его расстояние от центра r и энтропию S.

Полагая для малых и сферически симметричных колебаний

$$r = r_0(1+\xi) = r_0(1+\eta e^{i\omega t}), \tag{8}$$

$$S = S_0 + S' = S_0 + \sigma e^{i\omega t} \tag{9}$$

и подставляя в систему (1), (2) стационарное распределение (6), (7) и уравнение неразрывности, пренебрегая кривизной, световым давлением и выделением энергии, получаем уравнения пульсаций близ поверхности звезды:

$$-\omega^2\eta = \frac{g_0}{R_0}\left[(4-3\gamma)\eta + \gamma R_0\frac{d\eta}{dx} + \gamma R_0\frac{x}{\alpha+1}\frac{d^2\eta}{dx^2} + \sigma + \frac{x}{\alpha+1}\frac{d\sigma}{dx}\right], \tag{10}$$

$$i\omega\sigma = \frac{\lambda_0}{c_v b}\frac{1}{x^\alpha}\left[-4(m-1)\frac{1}{x}\frac{d\eta}{dx} + \frac{R_0}{m}\frac{1}{x}\frac{d^2\eta}{dx^2} + \right.$$
$$\left. + (\gamma-1)R_0\frac{d^3\eta}{dx^3} + (n+2)\frac{d\sigma}{dx} + \frac{d^2\sigma}{dx^2}\right], \tag{11}$$

где $m = (\gamma-1)(n+2)+1-s$; R_0 — равновесный радиус звезды; γ — показатель адиабаты; η — относительная амплитуда колебаний смещения; σ — амплитуда колебаний энтропии.

Постоянные величины, входящие в уравнения (10), (11), могут быть представлены в виде

$$\frac{g_0}{R_0} = \frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}, \tag{12}$$

$$\frac{\lambda_0}{c_v b} = \beta\frac{R_0^{\alpha+2}}{\tau}, \tag{13}$$

где $\tau = GM^2/R_0L$ — время тепловой релаксации звезды; β — безразмерный множитель порядка единицы, который может быть выражен через параметры стационарной теории внутреннего строения звезд.

Порядок величины частоты колебаний задается механическим уравнением

$$\omega \sim \sqrt{(3\gamma-4)\,{}^4/_3\,\pi G\bar{\rho}}. \tag{14}$$

Порядок величины частоты такой же, как и у адиабатических пульсаций.

Точка $x = 0$, т. е. поверхность звезды, является особой точкой теплового уравнения. Характер решений определяется прежде всего поведением их вблизи этой особой точки.

Для конечности σ необходимо, чтобы при $x = 0$ все производные, входящие в правую часть (11), обращались в нуль.

Уже отсюда видно, что пространственное распределение амплитуд не имеет ничего общего с адиабатическим. Первый член в правой части (11) мы сохранили только для того, чтобы показать, что при $x=0$ $d\eta/dx=0$. В остальном им можно пренебречь, как и всеми членами того же порядка малости, зависящими от кривизны.

Далее замечаем, что время тепловой релаксации звезды чрезвычайно велико в сравнении с периодом колебаний (для Цефеид их отношение порядка 10^7). Если за единицу длины принять радиус звезды R_0, то производные σ и η, входящие в правую часть (11), должны достигать значений порядка единицы уже на весьма малых расстояниях от поверхности. Но в центре звезды все первые производные должны обращаться в нуль. Этим двум условиям можно удовлетворить одновременно, только если σ и η содержат быстро осциллирующие функции с длиной волны, малой в сравнении с размерами звезды.

Для того чтобы избавиться от быстро осциллирующих функций, ищем решение системы (10), (11) в виде

$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{\sigma_0}{\gamma R_0}\left(e^{\psi+i\varphi} - \overline{\eta}'\right), \tag{15}$$

$$\sigma = \sigma_0 e^{\psi+i\varphi}, \tag{16}$$

где $\overline{\eta}'$ — медленно меняющаяся функция, обращающаяся в 1 при $x=0$.

Тогда механическое уравнение с точностью до медленно меняющихся членов удовлетворится тождественно. Подстановка же в тепловое уравнение даст систему из двух уравнений для φ и ψ:

$$\varphi'' = x^\alpha - \frac{\nu}{x}\varphi' - 2\varphi'\psi', \tag{17}$$

$$\psi'' = \varphi'^2 - \varphi'^2 - \frac{\nu}{x}\psi', \tag{18}$$

где за единицу длины принята величина

$$l = \left(\frac{\beta}{\gamma\tau\omega}\right)^{\frac{1}{\alpha+2}} R_0. \tag{19}$$

В (17) и (18) $\nu = n+s+1$.

Начальное условие: при $x=0$ $\varphi=\varphi'=\psi=\psi'=0$.

Вблизи поверхности решения системы (17), (18) имеют вид

$$\varphi = \frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+2)(\nu+\alpha+1)}, \tag{20}$$

$$\psi = \frac{x^{2\alpha+4}}{(2\alpha+4)(\nu+2\alpha+3)(\nu+\alpha+1)^2}. \tag{21}$$

Таким образом, вблизи поверхности пульсирующей звезды неизбежно возникновение колебаний энтропии, причем эти колебания должны иметь характер бегущих волн.

Пульсации звезды должны рассматриваться как комбинация колебаний смещения $\xi = \eta e^{i\omega t}$ и колебаний энтропии $S' = \sigma e^{i\omega t}$, причем близ поверхности последние не могут быть пренебрежимо малыми. Характеристическая длина энтропийных волн выражается формулой (19). Такого же порядка длина первой волны у поверхности. В силу большого значения α (около 3) характеристическая длина энтропийных волн (19) порядка нескольких сотых от радиуса звезды, хотя значение безразмерного параметра $\tau\omega$ порядка 10^7. По мере удаления от поверхности длина волны колебаний энтропии согласно (20) уменьшается, а амплитуда их согласно (21) экспоненциально возрастает. Это должно повести на расстояниях от поверхности порядка нескольких l к возникновению очень больших местных градиентов, нарушению устойчивости и переходу энтропийных волн в неупорядоченное турбулентное движение.

Для колебаний смещения интегрирование (15) с учетом (10) дает (в вещественной форме)

$$\xi = (\eta_0 + \eta_1) \cos \omega t + \eta_2 \sin \omega t, \tag{22}$$

где

$$\eta_0 = \frac{\sigma_0}{(3\gamma - 4)(g_0 / R_0) - \omega^2}, \tag{23}$$

$$\eta_1 = \frac{\sigma_0}{\gamma R_0} \int_0^x (\gamma' - e^{\psi} \cos \varphi) \, dx, \tag{24}$$

$$\eta_2 = \frac{\sigma_0}{\gamma R_0} \int_0^x e^{\psi} \sin \varphi \, dx. \tag{25}$$

Таким образом, колебания смещения могут быть представлены как сумма двух компонент, сдвинутых по фазе на 90°, причем амплитуды их существенно различным образом меняются с расстоянием от поверхности.

Поступило
16 VII 1951