

Д. В. ВАЙНБЕРГ

К РАСЧЕТУ СОСТАВНЫХ ДИСКОВ И ПЛАСТИН ПРИ ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 13 VIII 1951)

Известные решения ^(1,2) задач о плоской деформации или изгибе составных кольцевых пластин при действии сосредоточенных сил содержат, кроме замкнутых напряжений, бесконечные тригонометрические ряды. Так, в случае сжатия двумя сосредоточенными силами диска с ободом из разных материалов (рис. 1) получены в предположении сплошного контакта на границе $|z| = r$ формулы для напряжений:

$$\sigma_p = \frac{P}{\pi R} \left(A_p + \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} L_p \cos k\theta \right), \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = \dots \dots \dots$$

где

$$A_p = \frac{1}{\Delta} \left[1 + \alpha_{II} \xi^2 \eta^{-2} + \left(1 + \frac{\alpha_I - 1}{\varepsilon} \right) (1 - \xi^2 \eta^{-2}) \right]; \quad (2)$$

$$L_p = \frac{T}{N}; \quad T = (2 - k) \Phi_1 \eta^k + (2 + k) \Phi_2 \eta^{-k} - \Phi_3 \eta^{k-2} - \Phi_4 \eta^{-k-2}; \quad (3)$$

$$\Phi_1 = n \xi^{-2k} - 1 + k (\xi^{-2} - 1); \quad (4)$$

$$\Phi_2 = m \xi^{-2k} - 1 - k (\xi^{-2} - 1); \quad (5)$$

$$\Phi_3 = (mn - 1) \xi^2 + k (1 - n \xi^{-2k}) + k^2 (\xi^2 - 1); \quad (6)$$

$$\Phi_4 = (mn - 1) \xi^2 - k (1 - m \xi^{-2k}) + k^2 (\xi^2 - 1); \quad (7)$$

$$N = n \xi^{-2k} + f(\xi, k); \quad (8)$$

$$f(\xi, k) = m \xi^{2k} + l_1 k^2 + l; \quad (9)$$

$$l_1 = (\xi^{-1} - \xi)^2; \quad l = \xi^2 (1 - mn) = 2; \quad (10)$$

$$\Delta = 1 + \xi^2 \alpha_{II} + (1 - \xi^2) \left(1 + \frac{\alpha_I - 1}{\varepsilon} \right); \quad (11)$$

$$m = \frac{\alpha_I - \varepsilon \alpha_{II}}{1 + \alpha_I}; \quad n = \frac{1 + \varepsilon \alpha_I}{1 - \varepsilon}; \quad (12)$$

$$\alpha_I = \frac{3 - \nu_I}{1 + \nu_I}; \quad \alpha_{II} = \frac{3 - \nu_{II}}{1 + \nu_{II}}; \quad \varepsilon = \frac{\mu_I}{\mu_{II}}; \quad (13)$$

$$\xi = \frac{r}{R}; \quad \eta = \frac{\rho}{R}; \quad (14)$$

μ_r, μ_{II} — модули сдвига материала диска и обода; ν, ν_{II} — коэффициенты Пуассона; ρ, θ — полярные координаты точки. В случае однородного диска ряды, входящие в (1), исчезают и формулы приобретают замкнутый вид.

Следовательно, эти ряды характеризуют возмущения, вносимые в силовое поле составного диска нарушением его однородности на границе между смежными кольцевыми зонами. Оказывается, в тех случаях, когда параметр $\xi = r/R$ близок к единице (т. е. кольцевые участки узки), а также в случае большой разницы между жесткостями μ_I и μ_{II} сердечника и обода* сходимость рядов резко ухудшается.

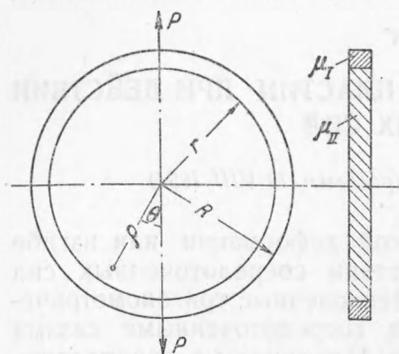


Рис. 1

Это обстоятельство можно объяснить тем, что возмещение силового поля велико вследствие резкого скачка в жесткости, а зона затухания возмущения весьма ограничена. Слабая сходимость рядов в последнем случае почти исключает практическую возможность приложения методов теории упругости к расчету прочности подобных частей машин. Для устранения этих трудностей предлагается способ, названный методом асимптотического суммирования. Сущность метода состоит в том, что из рядов, входящих в выражение для напряжений, последовательно выделяются части, суммируемые в замкнутом виде.

Выделение способствует улучшению сходимости остатка и одновременно уменьшает его удельный вес в величине искомого напряжения.

Обратим внимание на одну особенность, характерную для правой части выражения (8). Так как $\xi < 1$, то с возрастанием k $n\xi^{-2k}$ растет быстрее $f(\xi, k)$. Пользуясь этим, преобразуем члены L_ρ ряда (1) следующим образом:

$$\begin{aligned} L_\rho &= \frac{T}{N} = \frac{T}{n\xi^{-2k} + f(\xi, k)} = \frac{\xi^{2k}T}{n + B} = \\ &= \frac{T}{1 + \frac{B}{n}} \frac{\xi^{-2k}}{n} = \frac{T\xi^{2k}}{n} + \frac{B}{n} L_\rho, \end{aligned} \quad (15)$$

где введена новая величина

$$B = \xi^{2k} f(\xi, k), \quad (16)$$

занимающая особое место в дальнейшем.

Повторив преобразование (15) u раз ($u = 1, 2, 3, \dots$), придадим ряду (1) вид:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} L_\rho \cos k\theta &= \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{n} T \left[1 - \frac{B}{n} + \frac{B^2}{n^2} + \dots + (-1)^u \frac{B^u}{n^u} \right] \cos k\theta + \\ &+ (-1)^{u+1} \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{B^{u+1}}{n^{u+1}} L_\rho \cos k\theta. \end{aligned} \quad (17)$$

* Эти случаи как раз представляют прикладной интерес.

Первый ряд в правой части (17) суммируется в замкнутой форме при помощи введенных специальных функций W_p .

Члены второго ряда отличаются от членов исходного ряда $\sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} L_p \cos k\theta$ наличием множителя

$$\frac{B^{u+1}}{n^{u+1}} = \frac{\xi^{2(u+1)k} f(\xi, k)}{n^{u+1}}, \quad k = 2, 4, \dots, \quad u = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Таким образом, даже в наиболее неблагоприятном случае, когда величина $\xi = r/R$ близка к единице, этот ряд, начиная с некоторого k , убывает быстро благодаря высокой степени $\xi^{2(u+1)k}$ при большом u . Кроме того, удельный вес второй суммы в правой части (17) падает, так как знаменатель n^{u+1} — большое число.

Таким образом, выражение (1) для напряжений можно заменить следующим:

$$\sigma_p = \frac{P}{\pi R} \left[A_p + \frac{1}{n^{u+1}} (W_p)_u + (-1)^{u+1} \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{B^{u+1}}{n^{u+1}} L_p \cos k\theta \right]. \quad (19)$$

Специальные функции $(W_p)_u$ являются линейными комбинациями рядов

$$s_{i,p}^j = \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} k^i (\xi^p \eta^j)^k \cos k\theta, \quad p = 0, 2, 4, \dots, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad j = \pm 1, \quad (20)$$

суммируемых в замкнутом виде на основании выведенных формул:

$$s_{-1} = \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} x^k k^{-1} \cos k\theta = 0,5 (q - 0,5 \log \delta); \quad (21)$$

$$s_0 = \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} x^k \cos k\theta = 0,5 \left(\frac{\text{sh } 2q}{\delta} - 1 \right); \quad (22)$$

$$s_1 = \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} x^k k \cos k\theta = \frac{1}{\delta^2} (\text{ch } 2q \cos 2\theta - 1); \quad (23)$$

где положено:

$$x = \xi^p \eta^j; \quad q = \log x^{-1}; \quad \delta = \text{ch } 2q - \cos 2\theta. \quad (24)$$

Специальные функции $(W_p)_u$ имеют простую структуру, а именно:

$$(W_p)_0 = \beta' \bar{s}_{0,2} + \alpha \bar{s}_{2,2} + \beta \bar{s}_{1,2} + 2\bar{s}_{0,2} + \alpha' \bar{s}_{1,2}, \quad (25)$$

где

$$\bar{s}_{i,p} = s_{i,p}^1 + (-1)^i s_{i,p}^{-1}; \quad (26)$$

$$\bar{s}_{i,p} = n s_{i,p-2}^1 + (-1)^i m s_{i,p-2}^{-1}; \quad (27)$$

$$\alpha = (l_0 + l_1) \eta^{-2} - l_0; \quad \alpha' = \eta^{-2} - 1; \quad (28)$$

$$\beta = 1 + 2l_0 - \eta^{-2}; \quad \beta' = (2 + l) \eta^{-2} - l. \quad (29)$$

Значения функций $(W_\rho)_u$ для $u = 1, 2, \dots$ определяются на основании рекуррентных зависимостей

$$(W_\rho)_1 = n (W_\rho)_0 - \mathfrak{M} [(W_\rho)_0], \quad (30)$$

$$(W_\rho)_u = n (W_\rho)_{u-1} + (-1)^u \mathfrak{M}^{(u)} [(W_\rho)_0], \quad (31)$$

где \mathfrak{M} — оператор вида

$$\mathfrak{M}(s_{i,p}^j) = m s_{i,p+4}^j + l_1 s_{i+2,p+2}^j + l s_{i,p+2}^j \quad (32)$$

для сумм, входящих в состав $(W_\rho)_u$.

Ряды $s_{i,p}^j$ зависят только от геометрических параметров $\xi = r/R$ и $\eta = \rho/R$. Поэтому, будучи один раз протабулированы, они могут быть широко использованы в различных задачах плоской деформации, а также изгиба кольцевых пластин ступенчатого профиля при действии сосредоточенных сил.

Таблица 1

Метод вычисления		Величина замкнутой части выражения (1)	Сумма первых k членов ряда (1)	Полная величина напряжения	Число взятых членов
Непосредственное суммирование рядов (1)		$0,683 \frac{P}{\pi R}$	$10,928 \frac{P}{\pi R}$	$11,621 \frac{P}{\pi R}$	100
Метод асимптотического суммирования	при выделении $(W_\rho)_1$	$7,622 \frac{P}{\pi R}$	$4,0007 \frac{P}{\pi R}$	$11,6227 \frac{P}{\pi R}$	7
	при выделении $(W_\rho)_2$	$8,806 \frac{P}{\pi R}$	$2,8169 \frac{P}{\pi R}$	$11,623 \frac{P}{\pi R}$	3

Эффективность метода асимптотического суммирования характеризуется табл. 1, где приведена величина нормального напряжения σ_ρ в контакте ($\eta = \xi$ и $\theta = 0$) для весьма неблагоприятного случая $\xi = 0,9$ и $\epsilon = 0,125$ (рис. 1).

Институт строительной механики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
14 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Д. В. Вайнберг, Сборн. тр. Киевск. инж.-строит. ин-та, в. 8 (1948).
² М. З. Народецкый, ДАН, 58, № 7 (1947).