Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 2

ГИДРАВЛИКА

Н. К. ГИРИНСКИЙ

К РАСЧЕТУ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХ ПОТОКОВ ПОДЗЕМНЫХ ВОД СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗНОЙ МИНЕРАЛИЗАЦИИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 14 VII 1951)

Рассматриваемый здесь вопрос является частью большой проблемы движения двух жидкостей различной плотности, к которой относится вопрос о совместном движении нефти и подземной воды [1] и о движении пресных и соленых вод в основании некоторых гидротехнических сооружений [2]. При исследовании его будем считать поверхность водоупора горизонтальной и мощность водоносной толщи относительно небольшой. При этих условиях струйки подземных вод будут слабо наклонены к горизонту и, следовательно, составляющую скорости фильтрации по вертикали можно приравнять нулю [1].

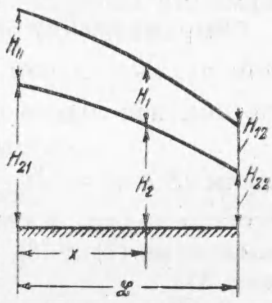

Рис. 1

Единичные расходы потоков для случая установившегося движения $k_{пр} = \text{const}$ и отсутствия питания подземных вод сверху, очевидно, равны (рис. 1):

$$q_1 = -k_{пр}\frac{\gamma_1}{\mu_1}H_1\frac{dh_1}{dx}, \quad q_2 = -k_{пр}\frac{\gamma_2}{\mu_2}H_2\frac{dh_2}{dx}. \tag{1}$$

Здесь индекс 1 относится к верхнему потоку, а 2 — к нижнему, H — глубины потоков, h — их напоры, $k_{пр}$ — коэффициент проницаемости породы, γ — объемный вес воды, μ — коэффициент вязкости ее.

Примем за плоскость сравнения верхнюю поверхность водоупора. Имеем:

$$h_1 = H_1 + H_2, \quad h_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}H_1 + H_2, \tag{2}$$

где ρ — плотность воды.

Подставляем h_1 и h_2 в формулы (1):

$$q_1 = -k_{пр}\frac{\gamma_1}{\mu_1}H_1\frac{dH_1 + dH_2}{dx}, \quad q_2 = -k_{пр}\frac{\gamma_2}{\mu_2}H_2\frac{\frac{\rho_1}{\rho_2}dH_1 + dH_2}{dx}. \tag{3}$$

Умножим q_1 на $\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\mu_1}{\gamma_1 k_{пр}}dx$, q_2 на $\frac{\mu_2}{\gamma_2 k_{пр}}dx$ и сложим полученные выражения; после преобразования имеем

$$\left(q_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\mu_1}{\gamma_1 k_{\text{пр}}} + q_2 \frac{\mu_2}{\gamma_2 k_{\text{пр}}}\right) dx = -d\left[\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{H_1^2}{2} + \frac{\rho_1}{\rho_2} H_1 H_2 + \frac{H_2^2}{2}\right], \tag{4}$$

откуда

$$q_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\mu_1}{\gamma_1 k_{\text{пр}}} + q_2 \frac{\mu_2}{\gamma_2 k_{\text{пр}}} =$$

$$= \frac{1}{2L}\left\{\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} H_{11}^2 + \frac{\rho_1}{\rho_2} 2H_{11}H_{21} + H_{21}^2\right) - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} H_{12}^2 + \frac{\rho_1}{\rho_2} 2H_{12}H_{22} + H_{22}^2\right)\right\}, \tag{5}$$

где вторая цифра индекса при H обозначает номер сечения, L — расстояние между сечениями.

Пользуясь выведенными зависимостями, нетрудно установить гидравлические критерии для всех типовых случаев рассматриваемого движения подземных вод и для некоторых из них — выражение расходов потоков.

Эти типовые случаи и критерии их существования следующие.

1. Жидкости движутся в одну сторону.

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \Delta H_1 + \Delta H_2 < 0, \tag{6}$$

где ΔH_1, ΔH_2 — приращения H_1 и H_2 на любом конечном расстоянии Δx (включая $\Delta x = L$); при этом за положительное направление x принимается направление уменьшения величины $H_1 + H_2$ (см. рис. 1).

Выражение (6) вытекает из формул (3). Действительно, при принятом положительном направлении x $\frac{d(H_1 + H_2)}{dx} < 0$ во всех сечениях потока; при одинаковом направлении движения, очевидно (см. формулы (3)), и $\frac{d\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} H_1 + H_2\right)}{dx} < 0$. Отсюда вытекает условие (6). Как нетрудно видеть, в соблюдении этого условия, так же как и приводимых ниже (7) и (8), достаточно убедиться при одном (любом) значении Δx.

2. Жидкости движутся в противоположных направлениях.

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \Delta H_1 + \Delta H_2 > 0. \tag{7}$$

3. Нижняя жидкость находится в покое.

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \Delta H_1 + \Delta H_2 = 0, \tag{8}$$

или, иначе,

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} H_1 + H_2 = \text{const}. \tag{8a}$$

Формула (8) вытекает из второй из формул (2).

4. Верхняя жидкость находится в покое.

$$H_1 + H_2 = \text{const} \tag{9}$$

хотя бы для одной пары сечений потока.

Два последних случая занимают промежуточное положение между первым и вторым.

Наиболее освещен в литературе третий случай, встречающийся в исследованиях фильтрации пресных вод морских побережий ([3]). Четвертый случай возможен в зоне выхода потока сильно минерализованных вод (рассолов) в море ниже уровня последнего, там, где они неполностью заполняют ту водопроницаемую породу, через которую фильтруют (содержащуюся в последней морскую воду по соображениям, приведенным в работе ([3]), можно считать находящейся в покое).

Второй случай может встретиться в водопроницаемых образованиях, залегающих между двумя бассейнами воды различной минерализации, в том случае, когда в верхних слоях этих бассейнов на одной и той же отметке давление в менее минерализованной воде больше, чем в более минерализованной (в связи с более высоким положением ее уровня), а в нижних слоях соотношение между давлениями обратное *.

Из формулы (5), учитывая зависимости (8а) и (9), получаем следующие выражения дебитов потоков в третьем и четвертом случаях:

$$q_1 = k_{\text{пр}} \frac{\gamma_1}{\mu_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \frac{H_{11}^2 - H_{12}^2}{2L}, \quad q_2 = 0; \tag{10}$$

$$q_1 = 0, \; q_2 = k_{\text{пр}} \frac{\gamma_2}{\mu_2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \frac{H_{21}^2 - H_{22}^2}{2L}. \tag{11}$$

Для определения q_1 и q_2 в первых двух случаях необходимо иметь еще одну зависимость. Выведем ее.

Разделим первое из выражений (3) на второе:

$$\frac{q_1\mu_1\gamma_2H_2\rho_1}{q_2\mu_2\gamma_1H_1\rho_2} = \frac{q_1\mu_1}{q_2\mu_2} \frac{H_2}{H_1} = \xi \frac{H_2}{H_1} = \frac{\dfrac{dH_2}{dH_1} + 1}{\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\dfrac{dH_2}{dH_1} + 1}, \tag{12}$$

отсюда

$$\frac{dH_2}{dH_1} = \frac{1 - \xi \dfrac{H_2}{H_1}}{\dfrac{\rho_2}{\rho_1} \xi \dfrac{H_2}{H_1} - 1} \tag{13}$$

и, следовательно,

$$H_1 = C \exp \left[- \int \frac{\dfrac{\rho_2}{\rho_1} \xi \dfrac{H_2}{H_1} - 1}{\dfrac{\rho_2}{\rho_1} \xi \left(\dfrac{H_2}{H_1}\right)^2 + (\xi - 1) \dfrac{H_2}{H_1} - 1} d \frac{H_2}{H_1} \right], \tag{14}$$

где C — постоянная.

Интеграл правой части уравнения (14) выражается, как известно, через элементарные функции; мы не приводим этого выражения лишь ввиду его громоздкости.

---

* Противоположное направление потоков в условиях неустановившегося движения легко осуществляется в опытах с моделью перемычки. Для этого надлежит один из ее бьефов наполнить окрашенной жидкостью одной плотности, а второй — неокрашенной жидкостью другой плотности. Через некоторое время в обоих бьефах будут обе жидкости, расположенные по вертикали согласно их плотностям.

Из зависимости (14) находится ξ, подставив которое в уравнение (5), нетрудно подсчитать q_1 и q_2.

Всесоюзный научно-исследовательский институт гидрогеологии и инженерной геологии

Поступило 2 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Лейбензон, Движение природных жидкостей и газов в пористой среде, 1947. [2] П. Я. Полубаринова-Кочина, Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод, 1942. [3] Н. К. Гиринский, ДАН, 58, № 4 (1947).