Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 5

МАТЕМАТИКА

В. И. ШНЕЙДМЮЛЛЕР

К СТРУКТУРЕ ДВУМЕРНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 31 VII 1951)

В работе (1) А. Г. Постников доказал следующую лемму:

Пусть имеются t различных рациональных чисел $\frac{p_i}{q_i}$, $\left|\vartheta-\frac{p_i}{q_i}\right|<\frac{c}{q_i^2}$, $c>0$, $q_i>0$. *Обозначим* $\max q_i=Q$, $\min q_i=q$. *Тогда* $\frac{Q}{q}>\sqrt{\frac{t-1}{c}}$.

Эта лемма допускает следующее дополнение, которое связано с задачей П. Л. Чебышева, поставленной и в основном решенной в его знаменитой работе (2).

Лемма. *Пусть дано t различных чисел* $\frac{p_i+\alpha}{q_i}$, *где вещественное* $\alpha\neq[\alpha]$, p_i *и* q_i — *целые,* $q_i>0$, $\left|\vartheta-\frac{p_i+\alpha}{q_i}\right|<\frac{c}{q_i^2}$, $c>0$. *Тогда* $\frac{Q}{q}>\sqrt{\frac{(t-1)\mu}{2c}}$, *где* μ — *наименьшее из трех чисел:* $\alpha'=\alpha-[\alpha]$, $1-\alpha'$, $\frac{1}{d}$. *Здесь* $d=Q_n+Q_{n+1}$, Q_{n+1} — *первый знаменатель при разложении числа* α' *в непрерывную дробь, для которого* $Q_{n+1}>Q-q$. *Если* α' *рационально и при разложении в непрерывную дробь все* $Q_n\leqslant Q-q$, *то* $d=Q-q$.

Доказательство. Считая $\alpha\neq[\alpha]$, расположим $\frac{p_i+\alpha}{q_i}$ по убыванию их величины:

$$\frac{p_t+\alpha}{q_t}-\frac{p_1+\alpha}{q_1}=\frac{p_t+\alpha}{q_t}-\frac{p_{t-1}+\alpha}{q_{t-1}}+\frac{p_{t-1}+\alpha}{q_{t-1}}-\frac{p_{t-2}+\alpha}{q_{t-1}}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{p_2+\alpha}{q_2}-\frac{p_1+\alpha}{q_1},$$

$$\frac{p_t+\alpha}{q_t}-\frac{p_1+\alpha}{q_1}=\sum_{i=2}^{i=t}\frac{\begin{vmatrix} p_i+\alpha & p_{i-1}+\alpha \\ q_i & q_{i-1}\end{vmatrix}}{q_i\,q_{i-1}}. \tag{1}$$

Оценим величину определителя в правой части формулы (1).

$$\begin{vmatrix} p_i+\alpha & p_{i-1}+\alpha \\ q_i & q_{i-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p_i+[\alpha] & p_{i-1}+[\alpha] \\ q_i & q_{i-1}\end{vmatrix}+\alpha'\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q_i & q_{i-1}\end{vmatrix}>0.$$

Обозначая для краткости буквой r первый определитель в правой части последнего равенства и буквой s — второй, имеем $r+\alpha's>0$.

Если r и $\alpha' s$ одного знака или одно из этих чисел равно нулю, то $r+s\alpha' = |r+s\alpha'| > \alpha'$ или >1, так как целые r и s одновременно в нуль обратиться не могут.

Если r и $s\alpha'$ разных знаков, то могут встретиться три случая: 1) $|r|=|s|$, 2) $|r|>|s|$, 3) $|s|>|r|$.

1) При $|r|=|s|$ имеем $r+s\alpha' = |r+s\alpha'| \geqslant |r| - |s\alpha'| = |r|(1-\alpha') \geqslant 1-\alpha'$.

2) При $|r|>|s|$ получим $r+s\alpha' = |r+s\alpha'| = \left|r\left(1+\frac{s}{r}\alpha'\right)\right| = |r|\left|1+\frac{s}{r}\alpha'\right| > |r|(1-\alpha') \geqslant 1-\alpha'$.

3) $|s|>|r|$. Отметим, что $s = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q_i & q_{i-1} \end{vmatrix} = q_{i-1} - q_i$. Следовательно, $|s| \leqslant Q-q$.

Известно, что форма $|r+s\alpha'|$ получит наименьшее значение, когда $-r/s$ является наилучшим приближением второго рода для α'. Всякое наилучшее приближение второго рода есть подходящая дробь [3]. Поэтому $|r+\alpha' s| \geqslant |P_n - \alpha' Q_n| > \frac{1}{Q_n + Q_{n+1}}$, где $Q_n \leqslant Q-q$, а $Q_{n+1} > Q-q$. Если α' рационально и при разложении в непрерывную дробь все $Q_n \leqslant Q-q$, то $|r+\alpha' s| \geqslant \frac{1}{Q-q}$. Пусть $\mu = \min\left(\alpha', 1-\alpha', \frac{1}{d}\right)$, тогда каждый числитель в правой части формулы (1) $\geqslant \mu$, а поэтому

$$\frac{p_t+\alpha}{q_t} - \frac{p_1+\alpha}{q_1} \geqslant \frac{\mu}{q_t q_{t-1}} + \frac{\mu}{q_{t-1}q_{t-2}} + \cdots + \frac{\mu}{q_2 q_1} \geqslant \frac{\mu(t-1)}{Q^2}.$$

С другой стороны:

$$\left|\frac{p_t+\alpha}{q_t} - \frac{p_1+\alpha}{q_1}\right| \text{[redacted]} \left|\frac{p_t+\alpha}{q_t} - \vartheta\right| \text{[redacted]} \left|\frac{p_1+\alpha}{q_1} - \vartheta\right| < \frac{c}{q_t^2} + \frac{c}{q_1^2} < \frac{2c}{q^2},$$

$$\frac{Q}{q^2} > \frac{\mu(t-1)}{2c}, \quad \frac{Q}{q} > \sqrt{\frac{(t-1)\mu}{2c}}$$

ч. и т. д.

Обобщим этот результат на двумерный случай подобно тому, как это делается в работе [1].

Пусть дано N различных пар чисел $t = \frac{q_i}{r_i+\alpha}$, $v = \frac{p_i}{r_i+\alpha}$, причем точки (t, v) не лежат на одной прямой, и имеют следующие неравенства:

$$|q_i\vartheta_1 + p_i\vartheta_2 - r_i - \alpha| < \frac{c}{q_i p_i}, \quad \vartheta_1 > 0, \quad \vartheta_2 > 0, \quad q_i > 0, \quad p_i > 0,$$

α вещественно. Обозначим $p = \max p_i$, $p = \min p_i$, $Q = \max q_i$, $q = \min q_i$. Заметим, что условия $|q_i\vartheta_1 + p_i\vartheta_2 - r_i - \alpha| < \frac{c}{p_i q_i}$ выполняются не при всяких ϑ_1 и ϑ_2 [4]. Возьмем выпуклую оболочку наших N точек. Пусть $N = n+m$, где n — число точек на границе, а m — число точек внутри. Мы можем соединить эти точки отрезками так, чтобы получилась система треугольников, вершинами которых являлись бы эти точки. Можно доказать, что число треугольников будет всегда $n+2m-2$ [1].

Пусть S — некоторая область на плоскости (t, v). Рассмотрим два интеграла:

$$I_1=\iint\limits_S\frac{dv\,dt}{v^3},\quad I_2=\iint\limits_S\frac{dv\,dt}{t^3}.$$

Если S — треугольник с вершинами (t_1, v_1), (t_2, v_2), (t_3, v_3), то

$$I_1=\frac{1}{2v_1v_2v_3}\left|\begin{vmatrix} t_1 & v_1 & 1\\ t_2 & v_2 & 1\\ t_3 & v_3 & 1\end{vmatrix}\right|,\quad I_2=\frac{1}{2t_1t_2t_3}\left|\begin{vmatrix} t_1 & v_1 & 1\\ t_2 & v_2 & 1\\ t_3 & v_3 & 1\end{vmatrix}\right|.$$

Разобьем нашу область (рис. 1) на $n+2m-2$ треугольников:

$$I_1=\iint\limits_S\frac{dv\,dt}{v^3}=\sum\frac{\left|\begin{vmatrix} q_i & p_i & r_i+\alpha\\ q_i' & p_i' & r_i'+\alpha\\ q_i'' & p_i'' & r_i''+\alpha\end{vmatrix}\right|}{2p_ip_i'p_i''} \qquad (2)$$

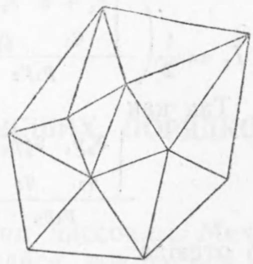

Рис. 1

(каждый определитель не равен нулю, потому что площадь треугольника не равна нулю).

Оценим величину определителей в правой части формулы (2):

$$\left|\begin{vmatrix} q_i & p_i & r_i+\alpha\\ q_i' & p_i' & r_i'+\alpha\\ q_i'' & p_i'' & r_i''+\alpha\end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix} q_i & p_i & r_i+[\alpha]\\ q_i' & p_i' & r_i'+[\alpha]\\ q_i'' & p_i'' & r_i''+[\alpha]\end{vmatrix}+\alpha'\begin{vmatrix} q_i & p_i & 1\\ q_i' & p_i' & 1\\ q_i'' & p_i'' & 1\end{vmatrix}\right|=|r+s\alpha'|>0.$$

Таким же образом, как и в доказательстве леммы, покажем, что $|r+\alpha' s|\geqslant\mu$, где $\mu=\min\left(\alpha',\ 1-\alpha',\ \frac{1}{d}\right)$, только теперь

$$s=\begin{vmatrix} q_i & p_i & 1\\ q_i' & p_i' & 1\\ q_i'' & p_i'' & 1\end{vmatrix}\leqslant 3PQ-3pq,$$

и поэтому, если r и s разных знаков и $|s|>|r|$, то

$$|r+\alpha' s|\geqslant|P_n-\alpha' Q_n|>\frac{1}{Q_n+Q_{n+1}},$$

где $Q_n\leqslant 3(PQ-pq)$, а $Q_{n+1}>3(PQ-pq)$.

Если α' рационально и при разложении в непрерывную дробь все $Q_n\leqslant 3PQ-3pq$, то $d=3PQ-3pq$.

Следовательно,

$$I_1\geqslant\frac{n+2m-2}{2P^3}\,\mu.$$

Аналогично

$$I_2\geqslant\frac{n+2m-2}{2Q^3}\,\mu.$$

С другой стороны, применяя формулу Римана,

$$I_1=\iint\limits_S\frac{dv\,dt}{v^3}=\frac{1}{2}\iint\limits_S\frac{-\partial(1/v^2)}{\partial v}\,dt\,dv=\frac{1}{2}\int\limits_L\frac{dt}{v^2},$$

где L — многоугольник, ограничивающий фигуру. Интеграл по одной стороне с концами (t_1, v_1) и (t_2, v_2)

$$v = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}(t - t_1) + v_1, \quad t = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{v_2 - v_1}(v - v_1),$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{v^2} = \frac{1}{2}\,\frac{t_2 - t_1}{v_2 - v_1}\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v^2} = \frac{1}{2}\,\frac{t_2 - t_1}{v_2 - v_1}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{t_2 - t_1}{v_1 v_2}.$$

Для нашей области это равно

$$\frac{1}{2p_1p_2}\begin{vmatrix} r_1 + \alpha & r_2 + \alpha \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix},$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\begin{vmatrix} r_1 + \alpha & r_2 + \alpha \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}}{p_1p_2} + \frac{\begin{vmatrix} r_2 + \alpha & r_3 + \alpha \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix}}{p_2p_3} + \cdots + \frac{\begin{vmatrix} r_n + \alpha & r_1 + \alpha \\ q_n & q_1 \end{vmatrix}}{p_np_1}\right).$$

Так как

$$\frac{\begin{vmatrix} \vartheta_2 p_1 & \vartheta_2 p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}}{p_1p_2} + \frac{\begin{vmatrix} \vartheta_2 p_2 & \vartheta_2 p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix}}{p_2p_3} + \cdots + \frac{\begin{vmatrix} \vartheta_2 p_n & \vartheta_2 p_1 \\ q_n & q_1 \end{vmatrix}}{p_np_1} = 0,$$

то отсюда

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\begin{vmatrix} r_1 + \alpha & r_2 + \alpha \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vartheta_2 p_1 & \vartheta_2 p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}}{p_1p_2} + \cdots + \frac{\begin{vmatrix} r_n + \alpha & r_1 + \alpha \\ q_n & q_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vartheta_2 p_n & \vartheta_2 p_1 \\ q_n & q_1 \end{vmatrix}}{p_np_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\begin{vmatrix} r_1 + \alpha - \vartheta_2 p_1 - \vartheta_1 q_1 & r_2 + \alpha - \vartheta_2 p_2 - \vartheta_1 q_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}}{p_1p_2} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{\begin{vmatrix} r_n + \alpha - \vartheta_2 p_n - \vartheta_1 q_n & r_1 + \alpha - \vartheta_2 p_1 - \vartheta_1 q_1 \\ q_n & q_1 \end{vmatrix}}{p_np_1}\right),$$

$$|I_1| < \frac{c}{2}\left(\frac{q_2\dfrac{1}{p_1q_1} + q_1\dfrac{1}{p_2q_2}}{p_1p_2} + \cdots + \frac{q_1\dfrac{1}{p_nq_n} + q_n\dfrac{1}{p_1q_1}}{p_np_1}\right) \leqslant \frac{c}{2}\, n\,\frac{2Q}{qp^3}.$$

Итак,

$$\mu\,\frac{n + 2m - 2}{3P^3} < nc\,\frac{Q}{qp^3}, \quad \frac{n + 2m - 2}{2P^3}\,\frac{\mu}{c} < \frac{Q}{q}\left(\frac{P}{p}\right)^3.$$

Аналогично,

$$\frac{n + 2m - 2}{2n}\,\frac{\mu}{c} < \frac{P}{p}\left(\frac{Q}{q}\right)^3.$$

Теорема.

$$\frac{n + 2m - 2}{2n}\,\frac{\mu}{c} < \frac{Q}{q}\left(\frac{P}{p}\right)^3,$$

$$\frac{n + 2m - 2}{2n}\,\frac{\mu}{c} < \frac{P}{p}\left(\frac{Q}{q}\right)^3,$$

Следствие.

$$\frac{n + 2m - 2}{2n}\,\frac{\mu}{c} < \left(\frac{QP}{qp}\right)^2.$$

Поступило
30 VII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Постников, ДАН, 76, № 4 (1951). [2] П. Л. Чебышев, Полн. собр. соч., 1, 1944, стр. 237—275. [3] А. Я. Хинчин, Цепные дроби, 1949. [4] А. Я. Хинчин, Усп. матем. наук, 3, в. 3 (25) (1948).