Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 2

МАТЕМАТИКА

М. Г. ХАПЛАНОВ

МАТРИЧНЫЙ ПРИЗНАК БАЗИСА В ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 22 VI 1951)

Последовательность функций

$$f_0(z), f_1(z), \ldots, f_n(z), \ldots, \tag{1}$$

аналитических в некоторой области (B), будем называть квази-степенным базисом в (B), если можно указать число R_1 такое, что:

1) для всякой последовательности чисел

$$c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots,$$

удовлетворяющей условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \frac{1}{R_1}, \tag{2}$$

ряд

$$c_0 f_0(z) + c_1 f_1(z) + \cdots + c_n f_n(z) + \cdots \tag{3}$$

равномерно сходится внутри (B);

2) всякая функция, аналитическая в (B), может быть, и притом единственным способом, представлена рядом (3), коэффициенты которого удовлетворяют условию (2).

Матрицей последовательности функций (1) назовем матрицу

$$M = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \cdots \\ a_{10} & a_{11} \cdots \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{pmatrix}, \tag{4}$$

в которой в $(k+1)$-м столбце стоит последовательность коэффициентов степенного разложения функции $f_k(z)$:

$$f_k(z) = a_{0k} + a_{1k} z + \ldots + a_{nk} z^n + \ldots \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{5}$$

Теорема 1. *Чтобы последовательность функций была квази-степенным базисом в круге $|z| < R$, необходимо и достаточно, чтобы матрица последовательности преобразовывала некоторое аналитическое пространство A_{R_1} в A_R и имела единственную обратную матрицу, преобразующую A_R в A_{R_1}* ([1], [2]).

Действительно, если последовательность (1) есть базис, то всякой функции, аналитической в круге $|z| < R$, соответствует, с одной стороны, ее ряд Тейлора

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots, \tag{6}$$

с другой стороны, ее разложение по базису

$$f(z) = c_0 f_0(z) + c_1 f_1(z) + \cdots + c_n f_n(z) + \cdots \tag{7}$$

Таким образом, между точками $a(a_0, a_1, \ldots)$ пространства A_R и точками $c(c_0, c_1, \ldots)$ пространства A_{R_1} устанавливается взаимно-однозначное, аддитивное и однородное соответствие. Подставляя ряды (5) и (6) в (7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 a_{00} + c_1 a_{01} + \ldots, \\ a_1 &= c_0 a_{10} + c_1 a_{11} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \tag{8}$$

что коротко в матричной форме можно записать так:

$$a = Mc. \tag{9}$$

Так как произвольной точке $c \in A_{R_1}$ соответствует точка $a \in A_R$, то матрица M преобразует пространство A_{R_1} в A_R. Это отображение непрерывно в том смысле, что последовательность точек $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots$, имеющая $Л$-предел в A_{R_1}, переходит преобразованием (9) в последовательность точек $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots$, имеющую $Л$-предел в A_R ([3], стр. 206). Но аналитическое пространство принадлежит к типу F [4], и в нем предел по норме совпадает с $Л$-пределом [1]. Следовательно, преобразование (9) непрерывно также в смысле предела по норме, и на основании теоремы Банаха ([5], стр. 41) из однозначности обратного отображения следует и непрерывность его — прежде всего, в смысле предела по норме, а следовательно, и в смысле $Л$-предела. Поэтому обратное преобразование может быть выражено ([3], стр. 207) с помощью некоторой матрицы N, преобразующей A_R в A_{R_1}:

$$c = N(a).$$

Из (9) и (10) следует $MN = NM = \mathscr{E}$, где $\mathscr{E}$ — единичная матрица, т. е. $N = M^{-1}$.

Докажем достаточность. Пусть c — произвольная точка из A_{R_1}. По условию теоремы, $Mc = a \in A_R$. Точка $v(1, z, \ldots, z^n, \ldots)$, $|z| < R$, принадлежит взаимному пространству $\overset{*}{A}_R$ [1]. Ряды (6) и (7) и последовательность функций (1) можно в матричной форме коротко записать так: $a_0 + a_1 z + \ldots = va$, $\{f_0(z), f_1(z), \ldots\} = vM$, $c_0 f_0(z) + c_1 f_1(z) + \ldots = (vM)c$.

На основании равенства $(vM)c = v(Mc)$ ([3], стр. 205), или, в развернутом виде: $c_0 f_0(z) + c_1 f_1(z) + \cdots = a_0 + a_1 z + \cdots$ заключаем, что ряд (3) для любого $c \in A_{R_1}$ представляет аналитическую в круге $|z| < R$ функцию.

Чтобы доказать равномерную сходимость ряда, рассмотрим множество точек $v(1, z, \ldots, z^n, \ldots)$ для $|z| \leqslant r < R$. Это ограниченное множество точек в пространстве $\overset{*}{A}_R$ [1]; с помощью матрицы M оно преобразуется в ограниченное множество точек $\{vM\}$ пространства $\overset{*}{A}_{R_1}$ [3]; поэтому существует [1] точка $b \in \overset{*}{A}_{R_1}$ $b(b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} < R_1$, удовлетворяющая неравенствам $|f_k(z)| \leqslant b_k$, $|z| \leqslant r < R$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Следовательно, для $|z| \leqslant r$ члены ряда (3) по модулю не превосходят членов сходящегося ряда $|c_0| b_0 + |c_1| b_1 + \cdots$, ч. и т. д.

Наоборот, пусть $f(z)$ — произвольная аналитическая в круге $|z| < R$ функция; последовательность коэффициентов ее степенного разложения определяет точку $a \in A_R$; из равенства (9) можно найти точку $c \in A_{R_1}$, $c = M^{-1}a$. Ряд (7) и будет искомым разложением функции $f(z)$ в ряд по функциям базиса.

Теорема 2. *Если $\{f_n(z)\}$ — квази-степенной базис в круге $|z|<R$, а $\{g_n(z)\}$ — квази-степенной базис в круге $|z|<R_1$ с коэффициентами из A_R, то, подставляя в степенные разложения функций $f_k(z)$, $k=0,1,\ldots$, вместо z^n функцию $g_n(z)$, $n=0,1,\ldots$, получим новый квази-степенной базис в круге $|z|<R_1$.*

Действительно, матрица нового базиса есть произведение матриц для данных базисов.

Рассмотрим еще пространство функций, аналитических внутри C_R, $R>\rho$, где C_R — образ окружности $|w|=R$, ρ — радиус круга, на внешность которого конформно отображается смежная к некоторому континууму K область, содержащая $z=\infty$ [6].

Пусть $\{\Phi_n(z)\}$ — последовательность полиномов Фабера, порожденная этим континуумом.

Теорема 3. *Если в степенные разложения функций, образующих квази-степенной базис в круге $|z|<R$, $R>\rho$, подставить вместо z^n полином Фабера $\Phi_n(z)$, $n=0,1,\ldots$, то получим квази-степенной базис внутри C_R.*

Действительно, возьмем $\rho<R'<R$. На $C_{R'}$ справедливо неравенство

$$|\Phi_n(z)|<{}^3/_2\,R'^n.$$

Следовательно, совокупность точек $w(\Phi_0(z), \Phi_1(z), \ldots)$, когда z лежит внутри $C_{R'}$, образует ограниченное множество точек в пространстве A_R. Базис внутри круга $|z|<R$ определяет матрицу M. Доказательство теоремы непосредственно следует из равенства $w(Mc)=(wM)c$, где $a=Mc$, $a\in A_R$, $c\in A_{R_1}$.

Теорема 4. *Всякий квази-степенной базис в круге $|z|<R$ с коэффициентами из A_{R_1} порождает новый базис в замкнутом круге $|z|\leqslant 1/R_1$, определяемый матрицей, транспонированной к матрице данного базиса.*

Если R и $1/R_1$ больше ρ, то аналогичная теорема справедлива для базисов внутри C_R и в замкнутой области, ограниченной кривой C_{1/R_1}.

Известно, что если матрица M отображает пространство A_{R_1} в A_R, то транспонированная матрица M' отображает $\overset{*}{A}_R$ в $\overset{*}{A}_{R_1}$, т. е. $\overline{A}_{1/R}$ в $\overline{A}_{1/R_1}$ Следовательно, для произвольной точки $c'\in\overline{A}_{1/R}$ точка $M'c'=a'\in\overline{A}_{1/R_1}$, и наоборот, если a' — произвольная точка из $\overline{A}_{1/R_1}$, то можно найти $c'=M'^{-1}a'$, $c'\in\overline{A}_{1/R}$.

Если $f(z)=a'v$ — произвольная функция, аналитическая в $|z|\leqslant 1/R_1$, то равенство $a'v=v(M'c')=(vM')c'$ дает разложение $f(z)$ по базису, определяемому матрицей M'.

Теорема 5. *Пусть матрица M преобразует пространство A_{R_1} в A_R и имеет единственную обратную, преобразующую A_R в A_{R_1}. Строчки матрицы определяют систему линейных операторов, обладающую свойством единственности для функций, аналитических внутри круга $|z|<R_1$ или кривой C_{R_1} $(R_1>\rho)$. Столбцы матрицы определяют систему линейных операторов, обладающую свойством единственности для функций, аналитических в замкнутых областях, ограниченных окружностью $|z|=1/R$ или кривой $C_{1/R}$ $(1/R>\rho)$.*

Действительно, если для функции $f(z)\equiv cv$ выполняется условие $Mc=0$, то $c=\theta$, т. е. $f(z)\equiv 0$.

Теорема 6. *Всякий квази-степенной базис в круге $|z|<R$ радиуса $R>1$ порождает бесконечное множество базисов в кольце $1/R<|z|<R$, а также в пространстве периодических функций с периодом 2π, аналитических в полосе*

$$-\ln R<\operatorname{Im} z<\ln R.$$

Возьмем какую-нибудь последовательность возрастающих целых положительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$; вычеркнув ее из натурального ряда чисел, запишем оставшиеся числа в виде последовательности $\beta_1, \beta_2, \ldots$ Обозначим через $v(v_0, v_1, \ldots)$ точку с координатами $v_0 = 1, v_{\alpha_k} = z^k$, $\tilde{v}_{\beta_k} = z^{-k}$. Пусть a — произвольная точка из A_R, $c = Ma$, а z лежит в кольце $1/R < |z| < R$. Равенство $\tilde{v}(Mc) = (\tilde{v}M)c$ в развернутом виде дает $f(z) = c_0 f_0(z) + c_1 f_1(z) + \ldots$, где $f(z) = a_0 + a_{\alpha_1} z + a_{\alpha_2} z^2 + \cdots$ $\cdots + \frac{a_{\beta_1}}{z} + \frac{a_{\beta_2}}{z^2} + \cdots, f_k(z) = a_{0k} + a_{\alpha_1 k} z + a_{\alpha_2 k} z^2 + \cdots + \frac{a_{\beta_1 k}}{z} + \frac{a_{\beta_2 k}}{z^2} + \cdots$ функции, аналитические в кольце. Равномерная сходимость ряда внутри кольца следует из того, что точки z, для z из кольца $1/r \leqslant |z| \leqslant r$, $1 < r < R$, образуют ограниченное множество точек в A_R^*, так как мажорируются точкой $\bar{v}(\bar{v}_0, \bar{v}_1, \ldots)$, где $\bar{v}_0 = 1$, $\bar{v}_{\alpha_k} = r^k$, $\bar{v}_{\beta_k} = r^k$, а следовательно, и подавно точкой $(1, r, r^2, \ldots)$.

Преобразование $z = e^{-i\zeta}$ переводит кольцо в полосу.

Ростовский государственный университет им. В. М. Молотова

Поступило 14 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Хапланов, ДАН, **79**, № 6 (1951). [2] М. Г. Хапланов, ДАН, **80**, № 1 (1951). [3] G. Köthe u. O. Töplitz, Journ. f. reine u. angew. Math., **171**, 193 (1934). [4] А. И. Маркушевич, Матем. сборн., **17**/59, 211 (1945). [5] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932. [6] А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, 1950.