Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 5

МАТЕМАТИКА

И. П. ЕГОРОВ

КОЛЛИНЕАЦИИ ПРОСТРАНСТВ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 30 VIII 1951)

1. Будем рассматривать коллинеации пространства проективной связности, заданного в X_n объектом Томаса $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}(x^1, x^2, \ldots, x_n)$. Пусть $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ — один из объектов аффинной связности, составляющие которого связаны с составляющими объекта $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ соотношениями

$$\Pi^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{2}{n+1}\,\delta^\alpha_{(\beta}\Gamma^\sigma_{\gamma)\sigma}.$$

Если V^σ обозначают компоненты бесконечно малой коллинеации пространства $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$, то они являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$V^\alpha_{,\beta} = U^\alpha_\beta, \tag{1}$$

$$U^\alpha_{\beta,\gamma} = R^\alpha_{\beta\gamma\sigma}V^\sigma + \delta^\alpha_\beta W_\gamma + \delta^\alpha_\gamma W_\beta, \tag{2}$$

где $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ — тензор кривизны $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, $W_\alpha(n+1) = V^\sigma_{,\sigma\alpha} - R^\sigma_{\sigma\alpha\tau}V^\tau$.

В системе уравнений (1), (2) и в следующих ниже соотношениях мы пользуемся ковариантным дифференцированием относительно объекта $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$. Коллинеации пространства проективной связности $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ являются для пространства $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ проективными коллинеациями по определению последних. В этой заметке мы полностью решаем вопрос об установлении максимального порядка групп коллинеации пространств проективной связности $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ с ненулевым тензором Вейля и транзитивности этих групп и завершаем, таким образом, предпринятые нами ранее исследования ([1]) по этому вопросу, предлагая при этом значительные упрощения в доказательствах. Тогда было установлено, что порядок полных групп коллинеации лишь не выше n^2+n-1.

2. Будем выписывать условия интегрируемости системы уравнений (1) — (2) относительно неизвестных функций V^α, W_α, U^α_β. Условия интегрируемости уравнений (1) выполняются, как известно, в силу уравнений (2) и тождества Риччи над составляющими тензора кривизны $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$.

Функции W_α в системе (1) — (2) не входят под знаком производных. Условия интегрируемости уравнений (2) позволяют получить для них совокупность дифференциальных уравнений, дополнительную к рассматриваемой системе (1) — (2), в виде, разрешенном относительно производных от всех W_α по всем переменным через V^α, U^α_β, в силу чего и сами оставшиеся соотношения интегрируемости представляются в форме

$$D_L\, W^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = 0, \tag{3}$$

где $W^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ — составляющие тензора Вейля, D_L — обозначает дифференцирование Ли вдоль V^{σ} [2].

Условия интегрируемости дополнительной совокупности дифференциальных уравнений выполняются в силу выводных соотношений, составляющих новые соотношения интегрируемости

$$(D_L\, W^{\alpha}_{\beta\gamma\delta})_{,\,\varepsilon} = 0, \tag{4}$$

в которых производные от функций V^{α}, U^{α}_{β} заменены на правые части (1) и (2).

3. Мы рассматриваем случай, когда соотношения (3), (4) и все выводимые из них соотношения интегрируемости не удовлетворяются тождественно, считая, что все указанные связи сводятся к $s < 4n - 5$ независимым соотношениям относительно функций V^{α}, W_{α}, U^{α}_{β}. Построим две матрицы

$$\left\| T^1_1\tbinom{\alpha}{\beta\gamma\delta},\ T^1_2\tbinom{\alpha}{\beta\gamma\delta}, \ldots,\ T^1_n\tbinom{\alpha}{\beta\gamma\delta}, \ldots,\ T^n_n\tbinom{\alpha}{\beta\gamma\delta} \right\|, \tag{5}$$

$$\left\| T^1_{\varepsilon}\tbinom{\alpha}{\beta\gamma\delta},\ T^2_{\varepsilon}\tbinom{\alpha}{\beta\gamma\delta}, \ldots,\ T^n_{\varepsilon}\tbinom{\alpha}{\beta\gamma\delta} \right\|, \tag{6}$$

элементы которых

$$T^{\sigma}_{\tau}\tbinom{\alpha}{\beta\gamma\delta} = \delta^{\sigma}_{\beta}\, W^{\alpha}_{\tau\gamma\delta} + \delta^{\sigma}_{\gamma}\, W^{\alpha}_{\beta\tau\delta} + \delta^{\sigma}_{\delta}\, W^{\alpha}_{\beta\gamma\tau} - \delta^{\alpha}_{\tau}\, W^{\sigma}_{\beta\gamma\delta},$$

$$T^{\sigma}_{\varepsilon}\tbinom{\alpha}{\beta\gamma\delta} = 2\delta^{\sigma}_{\varepsilon}\, W^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + \delta^{\sigma}_{\beta}\, W^{\alpha}_{\varepsilon\gamma\delta} + \delta^{\sigma}_{\gamma}\, W^{\alpha}_{\beta\varepsilon\delta} + \delta^{\sigma}_{\delta}\, W^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon} - \delta^{\alpha}_{\varepsilon}\, W^{\sigma}_{\beta\gamma\delta}$$

являются, соответственно, коэффициентами при функциях U^{τ}_{σ} в (3) и коэффициентами при новых функциях W_{σ} в уравнениях (4).

4. Построим минор матрицы (5), относящийся к строчкам

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_i\\ \alpha_2\,\alpha_2\,\alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\,\alpha_2\,\alpha_j\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_j\end{pmatrix}$$

и столбцам

$$\begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_i\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_j\\ \alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_j\\ \alpha_2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}i = 1,\ 2, \ldots,\ n\\ j = 4,\ 5, \ldots,\ n\end{pmatrix},$$

где $\alpha_i \neq \alpha_j$, и минор матрицы (6), отвечающий уравнениям

$$\alpha_i\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\,\alpha_2\,\alpha_3\end{pmatrix}\qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Учитывая число независимых соотношений в условиях интегрируемости, мы приходим к соотношениям

$$W^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_3} = 0, \tag{7}$$

имеющим место в любой системе координат.

5. Минор матрицы (5), отвечающий строчкам

$$\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_j\,\alpha_3\,\alpha_4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\,\alpha_j\,\alpha_4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_j\end{pmatrix}$$

и столбцам

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_i\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_j\\ \alpha_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_j\\ \alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_j\\ \alpha_4\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}i = 1,\ 2, \ldots,\ n\\ j = 5,\ 6, \ldots\ n\end{pmatrix},$$

и минор матрицы (6), связанный с уравнениями

$$\alpha_i \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

приводят в любой системе координат при наших предположениях к формулам ($n \geqslant 7$)

$$W^{\alpha_1}_{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} = 0. \qquad (8)$$

Нетрудно устанавливается справедливость этих соотношений для $n = 4, 5, 6$.

6. Если учесть, что пространство проективной связности с $\Pi^1_{23} = x^2$, причем другие $\Pi^\alpha_{\beta\gamma} = 0$, допускает группу коллинеаций

$$p_1, p_3, p_4, \ldots, p_n$$

$$x^2 p_1,\ x^3 p_1,\ p_2 - x^2 x^3 p_1,\ x^2 p_2 + 2x^1 p_1,$$

$$x^2 p_3 - \frac{(x^2)^3}{3} p_1,\ x^3 p_3 + x^1 p_1,$$

$$x^j p_1,\ x^2 p_i,\ x^3 p_i,\ x^i p_j$$

$$(i, j = 4, 5, \ldots, n)$$

порядка $n^2 - 2n + 5$, то формулы (7), (8) позволяют сделать при всех $n \geqslant 3$ следующий вывод:

Теорема. *Группы коллинеаций наибольшего порядка пространств проективной связности с отличным от нуля тензором Вейля транзитивны и их порядок равен $n^2 - 2n + 5$**.

7. Пространство аффинной связности с объектом перенесения $\Gamma^1_{23} = x^2$, причем другие $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$, не являющееся проективно-евклидовым пространством, допускает полную группу движений порядка $n^2 - 2n + 5$ с выписанными выше операторами. Учитывая это, рассуждения пп. 4 и 5, связанные с рассмотрением коэффициентов матрицы (5) при отмеченных в этих пунктах уравнениях и неизвестных функциях, относящихся (коэффициентов) к составляющим тензора кривизны аффинно связного пространства, позволяют сделать при $n \geqslant 3$ следующий вывод:

Теорема. *Наибольший порядок групп движений пространств аффинной связности A_n, отличных от проективно-евклидовых пространств, равен $n^2 - 2n + 5$. Все такие группы движений необходимо транзитивны.*

8. Отсюда непосредственно вытекает теорема, на возможность установления которой мы указывали раньше [3].

Теорема. *Пространства $\Lambda^\alpha_{(\beta\gamma)}$, соответствующие пространствам $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ общей несимметрической или полусимметрической аффинной связности с максимальной группой движений, являются проективно-евклидовыми пространствами.*

9. Пусть $\overline{D}_n$ обозначает максимально подвижное пространство аффинной связности, отличное от проективно-евклидового пространства. Для этих пространств имеет место следующая теорема.

---

* Максимальный порядок $n^2 - 2n + 5$ был известен автору в начале 1949 г.

Теорема. *Группа движений пространства $\overline{D}_n$ является группой проективных коллинеаций этого пространства.*

Это свойство следует из того, что проективные коллинеации любого $\overline{D}_n$ совпадают с коллинеациями пространства $\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}$, соответствующего $\overline{D}_n$, и того, что группа движений $\overline{D}_n$, являясь подгруппой группы проективных коллинеаций, содержит n^2-2n+5 параметров.

Пензенский государственный педагогический институт им. В. Г. Белинского

Поступило 15 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. П. Егоров, ДАН, 61, № 4 (1948). [2] Б. Л. Лаптев, Изв. Физ.-матем. об-ва при Казанск. ун-те, 10, 3 (1938). [3] И. П. Егоров, ДАН, 73, № 2 (1950).