Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 5

МАТЕМАТИКА

Ф. Д. ГАХОВ

ОБ ОСОБЕННЫХ СЛУЧАЯХ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА

(Представлено академиком М. В. Келдышем 14 VIII 1951)

§ 1. Пусть L есть контур, состоящий из некоторого числа простых замкнутых кривых, ограничивающих связную область D^+ и дополнительную к ней область D^-, содержащую бесконечно удаленную точку. Определить векторы $\varphi^+(z) = \{\varphi_1^+(z), \ldots, \varphi_n^+(z)\}$, $\varphi^-(z) = \{\varphi_1^-(z), \ldots, \varphi_n^-(z)\}$, голоморфные, соответственно, в областях D^+, D^- и удовлетворяющие на контуре n линейным соотношениям, которые можно записать в виде одного векторного:

$$\varphi^+(t) = C(t)\,\varphi^-(t) + b(t),$$

где $C(t)$ — матрица, элементы которой — заданные функции точек контура; $b(t)$ — заданный на контуре вектор.

В общей теории предполагается, что элементы $C(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют условию Гельдера, причем определитель матрицы $C(t)$ не обращается в нуль. Здесь мы рассмотрим исключительные случаи, когда определитель $C(t)$ может иметь нули в некотором конечном числе точек, а элементы $C(t)$ могут обращаться в бесконечность целого порядка в конечном числе точек $t'_1, \ldots, t'_p$. Цель исследования заключается в решении вопроса, как меняется число линейно независимых решений и число условий разрешимости от наличия нулей определителя и полюсов* элементов.

В моей работе [1] дано полное решение этого вопроса для $n = 1$. В этом случае получается вполне определенный результат, именно, наличие нулей не меняет числа линейно независимых решений, а наличие полюсов уменьшает это число на порядок полюса. В рассматриваемой здесь краевой задаче для системы n пар функций дело обстоит сложнее и окончательный результат не может быть выражен в такой простой и отчетливой форме. Но тенденция числа решений не изменяться от наличия нулей определителя и уменьшаться от наличия полюсов остается и здесь.

Способ исследования заключается в разложении матрицы коэффициентов на произведение двух матриц, из которых одна имеет нормальный вид, рассматриваемый в общей теории, т. е. элементы ее конечны и определитель не обращается в нуль, а другая составлена из рациональных функций и, следовательно, аналитически продолжима в области D^+, D^-.

* Здесь мы, для краткости, условно называем полюсом функции (неаналитической) точку, где функция обращается в бесконечность целого порядка.

Разложение матрицы в произведение достигается при помощи линейных преобразований, аналогичных тем, которые производятся для приведения базиса алгебраического поля к нормальной форме. Довольно подробное изложение этого способа дается в моих работах ([2,3]), здесь приведем только определение основных понятий и формулировку нужных результатов.

Мы говорим, что функция $c_{ik}(t)$ имеет в точке t_0 порядок α, если отношение $\frac{c_{ik}(t)}{(t-t_0)^{\alpha}}$ в точке t_0 конечно и не обращается в нуль. Порядком α_j столбца (строки) матрицы будем называть наинизший порядок элементов столбца (строки). В этом случае бином $(t-t_0)^{\alpha_j}$ называется делителем столбца (строки). Порядок функции и столбца (строки) в бесконечно удаленной точке получим из предыдущего, если заменим в данных определителях бином $t-t_0$ на $1/t$.

Говорят, что матрица в точке t_0 имеет нормальную форму по столбцам (строкам), если сумма порядков столбцов (строк) матрицы в этой точке равна порядку ее определителя.

Теорема. *Матрицу можно привести к нормальной форме по столбцам (строкам) при помощи элементарных преобразований ее столбцов (строк).*

Этой теореме можно придать еще следующую эквивалентную формулировку:

Матрицу можно привести к нормальной форме по столбцам (строкам) умножением справа (слева) на матрицу с постоянным определителем, элементы которой полиномы, если элементы данной матрицы имеют положительный порядок, и рациональные функции, если среди элементов данной матрицы есть имеющие отрицательный порядок.

Перейдем теперь к решению задачи.

§ 2. Рассмотрим сначала простейший случай, когда элементы матрицы $C(t)$ ограничены, а определитель обращается в нуль в точках $t_1, \ldots, t_m$ контура.

Однородная задача $\varphi^+(t) = C(t)\,\varphi^-(t)$. Линейными преобразованиями по строкам можно представить матрицу $C(t)$ в виде произведения

$$C(t) = Q(t)\,C_1(t),$$

где $Q(t)$ — полиномная матрица, нули определителя которой совпадают с нулями определителя $C(t)$, а $C_1(t)$ — матрица с определителем, не обращающимся в нуль.

Решение задачи получим в виде:

$$\varphi^+(z) = Q(z)\,X_1^+(z)\,P(z), \quad \varphi^-(z) = X_1^-(z)\,P(z),$$

где $X_1(z)$ — каноническая матрица краевой задачи $\varphi_1^+(t) = C_1(t)\,\varphi_1^-(t)$, а $P(z)$ — полиномный вектор с произвольными коэффициентами.

Из последнего легко выводится результат:

Число линейно независимых решений однородной краевой задачи не зависит от наличия нулей определителя матрицы коэффициентов $C(t)$ и будет таким же, как и в случае отсутствия нулей ($Q(t) \equiv 1$).

Неоднородная задача $\varphi^+(t) = C(t)\,\varphi^-(t) + b(t)$. Здесь нельзя матрицу $Q(t)$ перебрасывать в правую сторону, потому что свободный член $b(t)$ будет умножаться на $Q^{-1}(t)$ и будет иметь неинтегрируемую особенность в точках $t_1, \ldots, t_m$.

При помощи линейных преобразований по столбцам представим матрицу $C(t)$ в виде произведения

$$C(t) = C_1(t)\, Q(t),$$

где $C_1(t)$ и $Q(t)$ — матрицы того же характера, что и в предыдущем.

Решение можно получить в виде

$$\varphi^+(z) = X_1^+(z)\,[P(z) + \Phi^+(z)];$$

$$\varphi^-(z) = Q^-(z)\, X_1^-(z)\,[P(z) + \Phi^-(z)],$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\left[X_1^+(\tau)\right]^{-1} b(\tau)}{\tau - z}\, d\tau.$$

При помощи рассуждений, аналогичных тем, которые даны в моей работе ([3]), можно получить результат:

Наличие нулей определителя матрицы коэффициентов на контуре не влияет на число линейно независимых решений и число условий разрешимости неоднородной задачи. Число произвольных постоянных, а также и число условий резрешимости такие же, как и в случае отсутствия нулей.

Условия разрешимости, вообще говоря, меняют свой вид. В частности, для их выполнимости недостаточно, чтобы коэффициенты просто удовлетворяли условию Гельдера: нужно потребовать, чтобы в точках нулей определителя коэффициенты имели производные до некоторого порядка.

§ 3. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $t_1, \ldots, t_m$ — точки, где некоторые элементы $C(t)$ обращаются в бесконечность целого порядка, и $t_1', \ldots, t_p'$ — точки, где определитель обращается в нуль. Некоторые из точек t_k' могут совпадать с точками t_i.

При помощи линейных преобразований по столбцам представим матрицу $C(t)$ в виде произведения

$$C(t) = C'(t)\, R(t),$$

где $C'(t)$ — матрица, все элементы которой конечны, а $R(t)$ — матрица с рациональными элементами и определителем, обращающимся в бесконечность в точках $t_1, \ldots, t_m$ и нигде не обращающимся в нуль.

Затем, аналогично тому, как это делалось в § 2, представим $C'(t)$ в виде произведения

$$C'(t) = Q(t)\, C_1(t).$$

Матрица $C(t)$ представится в виде произведения трех множителей

$$C(t) = Q(t)\, C_1(t)\, R(t).$$

Решение задачи выразится формулами

$$\varphi^+(z) = Q(z)\, X_1^+(z)\, M^{-1}(z)\, P(z);$$

$$\varphi^-(z) = R^{-1}(z)\, X_1^-(z)\, M^{-1}(z)\, P(z),$$

где $M(z)$ — полиномная матрица с постоянным определителем, приводящая матрицу $[X_1^-(z)]^{-1} R(z)$ к нормальной форме в бесконечно удаленной точке.

Если обозначить суммарный индекс задачи $\varphi_1^+(t) = C_1(t)\varphi_1^-(t)$ через $\varkappa^*$, а порядок на бесконечности определителя матрицы $R(t)$ (суммарный порядок полюсов) через σ, то суммарный индекс данной задачи будет $\varkappa = \varkappa^* - \sigma$. Таким образом, суммарный индекс задачи уменьшается на суммарный порядок полюсов. Число линейно независимых решений тоже, вообще говоря, уменьшается, но, может быть, на меньшее число.

Окончательный результат может быть формулирован в виде:

Если матрица коэффициентов имеет полюса и определитель может обращаться в нуль, то число линейно независимых решений однородной задачи не зависит от наличия нулей определителя и уменьшается от наличия полюсов на число, не большее, чем суммарный порядок полюсов матрицы $R(t)$.

Некоторая неопределенность результатов вытекает не из недостатка исследования, а из существа вопроса.

Неоднородная задача $\varphi^+(t) = C(t)\varphi^-(t) + b(t)$. Здесь, как и в § 2, нельзя матрицу Q перебрасывать в левую сторону. Линейным преобразованием по столбцам представим матрицу $C(t)$ в виде произведения

$$C(t) = C_1(t)R(t),$$

где $C_1(t)$ — матрица со всюду конечными элементами и определителем, не обращающимся в нуль, а $R(t)$ — матрица с рациональными элементами, которые могут обращаться в бесконечность в точках $t_1, \ldots, t_m$, и с определителем, обращающимся в нуль в точках $t_1, \ldots, t_p$.

Употребляя те же обозначения, что и ранее, получим решение в виде:

$$\varphi^+(z) = X_1^+(z)M^{-1}(z)[P(z) + \Phi^+(z)];$$

$$\varphi^-(z) = R^{-1}(z)X^-(z)M^{-1}(z)[P(z) + \Phi^-(z)],$$

если выполнены условия разрешимости, которые распадаются на две группы: 1) вытекающие из условия конечности решения в бесконечности и 2) вытекающие из условий конечности решения в точках $t_1', \ldots, t_p'$ контура.

Подробный анализ позволяет сделать вывод:

В случае, если порядки столбцов матрицы коэффициентов $C(t)$, после приведения последней к нормальной форме, могут быть разных знаков (полюса элементов и нули определителя), то разность числа линейно независимых решений и числа условий разрешимости неоднородной задачи не зависит от порядков тех столбцов, которые имеют положительный знак, и уменьшается на число, равное сумме абсолютных величин порядков, имеющих отрицательный знак.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
14 VIII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Д. Гахов, Изв. Казанск. физ.-мат. об-ва, 14, сер. 3 (1949). [2] Ф. Д. Гахов, ДАН, 67, № 4 (1949). [3] Ф. Д. Гахов, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, № 6 (1950).