Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 5

МАТЕМАТИКА

М. В. АУССЕМ

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА n ИЗМЕРЕНИЙ, ОСНОВАННЫЕ НА ПОНЯТИИ ПЛОЩАДИ m-МЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 1 VIII 1951)

1. Настоящая работа является распространением работы Картана ([1]) на случай n-мерных пространств, зависящих от площади поверхностей любой размерности m. Картан построил пространство по заданному элементу площади гиперповерхности. Эта работа вызвала большую литературу ([2–5]). Девис ([2]) строит пространство для случая $m=2$ или $m=n-2$. У Кавагуши и Хокари ([3]) n и m — взаимно простые числа. Ивамото ([4]) строит пространство для любых n и m *.

2. Пусть в n-мерном аналитическом пространстве $(x^1, \ldots, x^n)$ задан m-кратный интеграл

$$\sigma = \int\limits_{(m)} \dot{F}(x^I, p_i^\alpha)\,[dx^1 \ldots dx^m] \quad **, \tag{1}$$

распространенный на m-мерную поверхность S $x^\alpha = f^\alpha(x^i)$, где p_i^α — частные производные, $p_i^\alpha = dx^\alpha / dx^i$.

Переходя к однородным координатам касательного элемента $p_i^\alpha = -u_i^\alpha / u_\alpha^\alpha$, введем функцию

$$L(x^I, u_K^\alpha) = \prod_\gamma u_\gamma^\gamma F\left(x, -\frac{u_i^\alpha}{u_\alpha^\alpha}\right).$$

Тогда интеграл (1) примет вид

$$\sigma = \frac{1}{\prod\limits_\gamma u_\gamma^\gamma} \int\limits_{(m)} L(x, u)\,[dx^1 \ldots dx^m]. \tag{1'}$$

3. Естественно за образующий элемент такого пространства взять плоский элемент (x, p) — точку x и проходящую через нее m-мерную плоскость. К каждому такому элементу присоединим n-мерное евклидово пространство — локальное пространство $E(x, p)$.

Геометрия всего пространства будет определена, если будет определено отображение на данное локальное пространство локального пространства, к нему бесконечно близкого. В большей своей части

*С японской литературой возможно было познакомиться лишь по рефератам, но, судя по ним, там построение иное.

** Здесь, как и далее, строчные латинские индексы пробегают значения $1, 2, \ldots, m$, греческие $m+1, \ldots, n$, прописные $1, 2, \ldots, n$.

эта задача сводится к тому, чтобы к каждому локальному пространству $E(x, p)$ присоединить определенный репер $\{\mathbf{M}, \mathbf{e}_I\}$

$$\mathbf{e}_I \mathbf{e}_J = g_{IJ}(x, p).$$

Тогда связность будет определена, если будет определено отображение репера $\{\mathbf{M} + d\mathbf{M}, \mathbf{e}_I + d\mathbf{e}_I\}$, присоединенного к соседнему пространству $E(x + dx, p + dp)$, на репер $\{\mathbf{M}, \mathbf{e}_I\}$ пространства $E(x, p)$

$$d\mathbf{e}_I = \omega_I^K \mathbf{e}_K,$$

где ω_I^K — формы относительно дифференциалов координат точки и проходящей через нее плоскости dx^I и $dp_{I_1 \ldots I_{n-m}}$

$$\omega_I^K = \Gamma_{IH}^K dx^H + C_I^{K(H)} dp_{(H)}, \tag{2}$$

где (H) — сложный индекс $H_1, H_2, \ldots, H_{n-m}$.

Требуя, чтобы наше пространство в окрестности каждого своего элемента (x, p) обладало свойствами евклидова пространства, получим, что расстояние между центрами $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M} + d\mathbf{M}$ двух бесконечно близких элементов (x, p) и $(x + dx, p + dp)$ будет равно

$$ds^2 = g_{IJ}(x, p)\, dx^I dx^J.$$

Требуя сохранения его при отображении, получим, переходя к контравариантным компонентам g^{IJ} метрического тензора,

$$\frac{\partial g^{IJ}}{\partial x^K} = -\Gamma_K^{IJ} - \Gamma_K^{JI}, \quad \frac{\partial g^{IJ}}{\partial p_{(K)}} = -C^{IJ(K)} - C^{JI(K)}. \tag{3}$$

Тогда эти условия, пополненные еще небольшим числом уравнений, определят коэффициенты Γ, C, т. е. связность.

4. Вариация интеграла (1') для экстремальных поверхностей S равна ((6), формула (104)) m-кратному интегралу

$$\frac{1}{\prod\limits_{\gamma} u_\gamma^\gamma} \int\limits_{(m)} \{u_\alpha^\alpha L_{u_\alpha^\alpha} - (n - m + 1) L\} [dx^1 \ldots dx^m] -$$

$$- u_\alpha^\alpha L_{u_i^\alpha} [dx^1 \ldots dx^{i-1} dx^\alpha dx^{i+1} \ldots dx^m]\,^*, \tag{4}$$

распространенному на бесконечно узкий пояс, образованный контуром C на экстремали при деформации.

В случае гиперповерхности $m = n - 1$, когда этот интеграл примет вид

$$\frac{1}{u_n} \int\limits_{(n-1)} L_{u(I_1} [dx^{I_2} \ldots dx^{I_n})],$$

где круглые скобки означают циклирование, естественно, по аналогии с трехмерным пространством, принять L_{u_I} за координаты нормали к элементу u_I.

5. Если поверхность S — не гиперповерхность, то рассмотрим одну из $(m + 1)$-мерных плоскостей, содержащих m-мерную касательную плоскость, например,

---

* Два одинаковых индекса, один вверху, другой внизу, у разных букв, означают суммирование по этому индексу.

$$dx^\alpha = -\frac{u_i^\alpha}{u_\alpha^\alpha}\, dx^i \tag{5}$$

при $\alpha \neq \alpha_k$.

Вариация интеграла (4) в ней примет вид

$$u_{\alpha_k}^{\alpha_k} \int\limits_{(m)} L_{u_{\alpha_k}^{\alpha_k}} [dx^1 \dots dx^m] + L_{u_i^{\alpha_k}} [dx^1 \dots dx^{i-1} dx^{\alpha_k} dx^{i+1} \dots dx^m]$$

(по α_k не суммировать!).

Наша плоскость в этом $(m+1)$-мерном пространстве будет гиперплоскостью и, следовательно, нормаль к ней будет иметь 1-й, 2-й, ..., m-й и α_k-й координатами

$$L_{u_1^{\alpha_k}},\ L_{u_2^{\alpha_k}} \dots L_{u_m^{\alpha_k}},\quad L_{u_{\alpha_k}^{\alpha_k}} = -\frac{u_i^{\alpha_k}}{u_{\alpha_k}^{\alpha_k}} L_{u_i^{\alpha_k}} + \frac{L}{u_{\alpha_k}^{\alpha_k}}.$$

В силу (5) остальными координатами будут $-\frac{u_i^\alpha}{u_\alpha^\alpha} L_{u_i^{\alpha_k}}$ и, следовательно, координаты $L^{I_1 \dots I_{n-m}}$ $(n-m)$-вектора нормали будут пропорциональны $(n-m)$-минорам $\overline{L}^{I_1 \dots I_{n-m}}$ матрицы, каждая строчка которой является координатами одной из $n-m$ нормалей. Возьмем в качестве них величины $\frac{\overline{L}^{I_1 \dots I_{n-m}}}{(L)^{n-m-1}}$.

6. Для $L^{I_1 \dots I_{n-m}}$ проверяются равенства

$$L^{I_1 \dots I_{n-m}} p_{I_1 \dots I_{n-m}} = L, \quad L^{I_1 \dots I_{n-m}} dp_{I_1 \dots I_{n-m}} = dL. \tag{6}$$

Таким образом, можно сказать, что координаты нормали являются производными L по грассмановым координатам элемента, и, следовательно, в силу (6), L однородно первого измерения относительно $p_{I_1 \dots I_{n-m}}$.

В силу $\binom{n}{m} - m(n-m) - 1$ линейных зависимостей между $dp_{I_1 \dots I_{n-m}}$, являющихся дифференциальными следствиями условий Грассмана, координаты нормали не единственные производные L, но они — единственные, которые являются простым поливектором.

7. Перпендикулярность нормали к m-мерной плоскости дает

$$LL^{I_1 \dots I_{n-m}} = gg^{I_1 \dots I_{n-m},\, J_1 \dots J_{n-m}} p_{J_1 \dots J_{n-m}}.$$

Потребуем, чтобы $C^{IJ(K)}$ обладало симметрией относительно I и J, тогда

$$dg^{IJ} = -2g^{IK} \omega_K^J \,(\mathrm{mod}\, dx^K), \quad C^{IJ(K)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{IJ}}{\partial p_{(K)}}. \tag{7}$$

Требование, чтобы элемент $p_{I_1 \dots I_{n-m}}$ при отображении в точке попадал в элемент с теми же самыми координатами, даст

$$gg^{I_1 \dots I_{n-m},\, J_1 \dots J_{n-m}} = L^{I_1 \dots I_{n-m}} L^{J_1 \dots J_{n-m}} + \\ + LL^{I_1 \dots I_{n-m},\, J_1 \dots J_{n-m}}, \tag{8}$$

где $L^{I_1\ldots I_{n-m},\, J_1\ldots J_{n-m}}$ определяются из уравнений

$$dL^{I_1\ldots I_{n-m}} = L^{I_1\ldots I_{n-m},\, J_1\ldots J_{n-m}}\, dp_{J_1\ldots J_{n-m}}$$

и, следовательно, для каждого $L^{I_1\ldots I_{n-m}}$ с $\binom{n}{m} - m(n-m) - 1$ параметрами, таким образом в нашем распоряжении $\binom{n}{m}\left\{\binom{n}{m} - m(n-m) - 1\right\}$ параметров.

8. Для того чтобы $gg^{I_1\ldots I_{n-m},\, J_1\ldots J_{n-m}}$, определенные из (8), были минорами определителя метрического тензора, они должны удовлетворять $\binom{n}{m}^2 - \frac{n(n+1)}{2}$ условиям; из них $\frac{\binom{n}{m}\left\{\binom{n}{m}-1\right\}}{2}$ условиям симметрии, в силу дифференциальной природы $L^{I_1\ldots I_{n-m},\, J_1\ldots J_{n-m}}$, можно удовлетворить лишь $\frac{\left\{\binom{n}{m}-1\right\}\binom{n}{m}}{2} - \frac{\{m(n-m)\}\{m(n-m)+1\}}{2}$ параметрами.

Таким образом, на $\binom{n}{m}^2 - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{\{m(n-m)+1\}\{m(n-m)\}}{2}$ соотношений остается $\binom{n}{m}\left\{\binom{n}{m} - m(n-m) - 1\right\}$ параметров, которыми часть из этих соотношений можно удовлетворить, остальные явятся дифференциальными уравнениями на функцию L.

9. Определив из (8)g^{IJ}, мы можем по формулам (7) найти коэффициенты $C^{IJ(K)}$, т. е. определить связность в точке. Можем мерить углы между m-мерным плоскостями — квадрат угла между бесконечно близкими элементами равен

$$d\varphi^2 = \frac{1}{L}\, dL^{I_1\ldots I_{n-m}} dp_{I_1\ldots I_{n-m}}.$$

10. Для того чтобы связность определить до конца, рассмотрим цикл исходящий из точки $\mathbf{M}$ и вне нее возвращающийся, к каждой точке которого присоединены элементы такие, что при отображении в одно локальное пространство они все становятся параллельными, и потребуем, чтобы при этом отображении наш цикл отобразился в замкнутую кривую.

Получим условия

$$\left(\Gamma^K_{IH} + C^{K(L)}_I p_{L_1\ldots L_{k-1} M L_{k+1} L_{n-m}} \Gamma^M_{L_k H}\right) -$$
$$-\left(\Gamma^K_{HI} + C^{K(L)}_H p_{L_1\ldots L_{k-1} M L_{k+1}\ldots L_{n-m}} \Gamma^M_{L_k I}\right) = 0,$$

которые вместе с условиями (3) дадут полную систему уравнений для определения Γ^K_{IH}.

В заключение выражаю благодарность проф. С. П. Финикову, под руководством которого выполнена эта работа.

Московский городской педагогический институт
им. В. П. Потемкина

Поступило
28 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Cartan, Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire, Paris, 1933. [2] E. T. Davies, Journ. London Math. Soc., 20, 163 (1945). [3] A. Kawaguchi, S. Hokari, Proc. Imp. Acad., 26, (1940). [4] H. Iwamoto, Math. Japonicae, 1, 74 (1948). [5] В. В. Вагнер, Матем. сборн., 19, 341 (1946); 20, 3 (1947). [6] Th. de Donder, Théorie invariative du calcul des variations, Paris, 1930.