Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 2

МАТЕМАТИКА

Б. С. СОДНОМОВ

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СУММАХ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 6 VII 1951)

Арифметической суммой двух множеств E_1 и E_2 действительных чисел называется множество всех чисел вида $x_1 + x_2$, где $x_1 \in E_1$ и $x_2 \in E_2$. Обозначим ее через $E_1 \oplus E_2$. С геометрической точки зрения, арифметическая сумма $E_1 \oplus E_2$ представляет проекцию на ось Ox топологического произведения $E_1 \times E_2$ вдоль прямых $y + x = \text{const}$ (1). Таким образом, арифметическое суммирование есть частный случай операции проектирования.

Пусть T есть минимальное семейство множеств, содержащее все отрезки и замкнутое относительно счетного суммирования, взятия дополнения и арифметического суммирования. Настоящая заметка посвящена изучению множеств семейства T. Все множества семейства T суть проективные множества. Классы проективных множеств определяются так. Класс A_0 есть класс всех F_σ. Если класс A_α определен, то CA_α есть класс всех множеств, дополнительных к множествам класса A_α.

Пусть классы A_β и CA_β определены для всех $\beta < \alpha$.

1. $\alpha = \beta^* + 1$. В этом случае A_α есть класс всех множеств, являющихся проекциями множеств класса CA_{β^*}.

2. α — второго рода. Тогда A_α есть класс множеств, являющихся счетными суммами множеств, входящих в классы A_β, где $\beta < \alpha$.

Арифметическая сумма двух множеств класса A_α, $\alpha < \Omega$, есть множество этого же класса, так как последний замкнут относительно операции проектирования. В настоящей заметке мы покажем, что арифметическое суммирование выводит за пределы любого класса CA_α, $\alpha < \Omega$. Кроме того, показывается, что если только существуют неизмеримые (L) проективные множества, то существуют неизмеримые (L) множества и в семействе T.

Введем следующее определение. Совершенное множество P назовем правильным, если оно может быть представлено в виде

$$P = \prod_n \sum_{i_1 \cdots i_n} \delta_{i_1 \cdots i_n},$$

где $i_k = 0, 1$ и $\delta_{i_1 \cdots i_n}$ суть отрезки, удовлетворяющие следующим условиям: 1) для всякого фиксированного n $\delta_{i_1 \cdots i_n}$ суть конгруентные и попарно непересекающиеся отрезки; 2) каковы бы ни были $i_1, i_2, \ldots, i_n$, i_{n+1} и n, $\delta_{i_1 \cdots i_n i_{n+1}}$ расположен на $\delta_{i_1 \cdots i_n}$ и имеет с ним общий конец. Отрезки $\delta_{i_1 \cdots i_n}$ назовем отрезками n-го ранга. Пусть r_n — длина отрезка n-го ранга, ρ_n — расстояние между правым концом отрезка $\delta_{i_1 \cdots i_{n-1} 0}$ и левым концом отрезка $\delta_{i_1 \cdots i_{n-1} 1}$ и $\varepsilon_n = r_n / \rho_n$.

Последовательность чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ назовем характеристикой множества P.

Лемма. *Пусть P — правильное совершенное множество, каждый член характеристики которого меньше $^1/_2$.*

Тогда существует плоское совершенное множество H, униформное по направлению оси Oy, такое, что его проекция на ось Ox вдоль прямых $y+x=\mathrm{const}$ совпадает с P, все непустые пересечения H с прямыми $y+x=\mathrm{const}$ суть совершенные множества, проекции которых на ось Oy совпадают между собой, а проекция H на ось Ox есть правильное совершенное множество.

Теорема 1. *Каково бы ни было $\alpha<\Omega$, существуют множество класса CA_α и совершенное множество, арифметическая сумма которых есть множество существенно класса $A_{\alpha+1}$.*

Взяв некоторое правильное совершенное множество P, построим для него плоское множество H, удовлетворяющее лемме 1. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ суть непрерывные отображения соответственно множества P и проекции H на ось Oy на отрезок $[0, 1]$. Тогда отображение $\Phi(x, y)$, определяемое формулами

$$x' = \varphi(x+y),$$

$$y' = \psi(y),$$

есть непрерывное отображение множества H на единичный квадрат.

Возьмем некоторое множество $E, E \subset [0, 1]$, существенно класса $A_{\alpha+1}$. Тогда E есть проекция на ось Ox некоторого плоского множества $\mathcal{E}$ класса CA_α. Можно предположить, что $\mathcal{E}$ расположено на единичном квадрате и его проекция на ось Oy есть отрезок $[0, 1]$. Пусть $\mathcal{E}^*$ есть полный прообраз множества $\mathcal{E}$ при отображении Φ. Тогда проекции $\mathcal{E}^*$ на оси Ox и Oy — искомые множества.

Следствие 1. *Существуют множество типа G_δ и совершенное множество, арифметическая сумма которых есть A-множество, неизмеримое B.*

Однако путем арифметического суммирования B-множеств можно получить отнюдь не всякое A-множество.

Следствие 2. *Существует линейное G_δ, множество расстояний между точками которого есть A-множество, неизмеримое B.*

Существование плоского G_δ, обладающего таким свойством, было установлено В. Серпинским в 1925 г. Тогда же им была поставлена задача установить, существует или нет линейное G_δ, обладающее этим же свойством. Следствие 2 дает положительное решение этой задачи.

Теорема 2. *Каково бы ни было $\alpha<\Omega$, существует последовательность $\varepsilon_1^{(\alpha)} \geqslant \varepsilon_2^{(\alpha)} \geqslant \cdots \geqslant \varepsilon_n^{(\alpha)} \geqslant \cdots$ положительных чисел $\varepsilon_n^{(\alpha)}$ такая, что у всякого правильного совершенного множества с характеристикой $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, где $\xi_n \leqslant \varepsilon_n^{(\alpha)}$, $n = 1, 2, \ldots$, любая его часть, входящая в класс A_α, входит в семейство T.*

Для $\alpha = 0$ теорема тривиальна.

Пусть она доказана для всех $\beta<\alpha$.

1. $\alpha = \beta^* + 1$. В этом случае можно построить такое правильное совершенное множество P, что каждый член характеристики проекции на ось Ox плоского множества H, удовлетворяющего лемме 1 для множества P, меньше соответствующего члена последовательности для числа β^*. Тогда характеристика множества P есть искомая последовательность для числа α.

2. α — второго рода. Пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ — некоторый пересчет всех $\beta<\alpha$, а $\varepsilon_1^{(\beta_n)} \geqslant \varepsilon_2^{(\beta_n)} \geqslant \cdots \geqslant \varepsilon_n^{(\beta_n)} \geqslant \cdots$ есть последовательность, соответствующая числу β_n, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда последовательность

$\varepsilon_1^{(\alpha)} \geqslant \varepsilon_2^{(\alpha)} \geqslant \cdots \geqslant \varepsilon_n^{(\alpha)} \geqslant \cdots$, где $\varepsilon_1^{(\alpha)} = \varepsilon_1^{(\beta_1)}$, $\varepsilon_2^{(\alpha)} = \min(\varepsilon_1^{(\beta_1)}, \varepsilon_1^{(\beta_2)}), \ldots, \varepsilon_n^{(\alpha)} = \min(\varepsilon_n^{(\beta_1)}, \varepsilon_n^{(\beta_2)}, \ldots, \varepsilon_n^{(\beta_n)})$ — искомая последовательность для α.

Замечание 1. Если α — натуральное число, то можно найти последовательность, все члены которой равны одному и тому же числу ε_α и которая удовлетворяет теореме 2 для числа α.

Теорема 3. *Если все множества семейства T измеримы (L), то измеримы (L) все проективные множества.*

Допустим, что теорема 3 неверна. Тогда существует неизмеримое (L) множество E некоторого класса A_{α^*}. Будем предполагать, что E расположено на отрезке $[0, 1]$. Возьмем последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ так, чтобы

$$\frac{1}{2^{2^{n_k}-1}-1} \leqslant \varepsilon_k^{(\alpha^*)},$$

где $\varepsilon_1^{(\alpha^*)}, \varepsilon_2^{(\alpha^*)}, \ldots, \varepsilon_k^{(\alpha^*)}, \ldots$ есть последовательность, удовлетворяющая теореме 2 для числа α^*. Рассмотрим два множества P_1 и P_2 соответственно всех точек вида* $x = 0, \alpha_1 0 \ldots 0 \alpha_{n_1+1} 0 \ldots 0 \alpha_{n_1+n_2+1} 0 \ldots \ldots 0 \alpha_{n_1+\cdots+n_k+1}, 0 \ldots$, $\alpha_p = 0, 1$, и всех точек вида $x = 0, 0\beta_2 \cdots \beta_{n_1} 0 \beta_{n_1+2} \cdots \cdots \beta_{n_1+n_2} 0 \beta_{n_1+n_2+2} \cdots$, $\beta_q = 0, 1$. P_1 и P_2 суть совершенные множества. Пусть $h(x)$ есть подобное отображение $[0, 1]$ в множество P_1, определенное равенством $h(0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots) = 0, \alpha_1 0 \ldots 0 \alpha_{n_1+1} 0 \ldots 0 \alpha_{n_1+\cdots+n_k+1} 0 \ldots$ Если E^* есть образ множества E при отображении $h(x)$, то $E^* \subset P_1$ и $E^* \in A_{\alpha^*}$. Но P_1 есть правильное совершенное множество с характеристикой $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$, где $\xi_k < \frac{1}{2^{2^{n_k}-1}-1} \leqslant \varepsilon_k^{(\alpha^*)}$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда E^* входит в семейство T.

Можно теперь показать, что множество $E^* \oplus P_2$ неизмеримо (L). Но это противоречиво, так как $E^* \oplus P_2$ входит в семейство T.

Из самого доказательства теоремы 3 следует, что если бы удалось найти индивидуальное неизмеримое (L) проективное множество, то немедленно было бы построено неизмеримое (L) множество и в семействе T.

В силу теоремы 2 в семействе T можно найти представителя любого класса проективных множеств. С другой стороны, как было отмечено, все множества семейства T суть проективные множества. Остается открытым вопрос, является ли семейство T правильной частью класса всех проективных множеств или нет.

Отметим еще семейство множеств T': минимальное семейство, содержащее все замкнутые множества и замкнутое относительно конечного пересечения, разности и арифметического суммирования. $T' \subset T$. T' состоит из множеств, входящих в конечные классы проективных множеств. Однако в нем можно найти представителя любого конечного класса проективных множеств. Если существует неизмеримое (L) проективное множество конечного класса, то существует неизмеримое множество и в семействе T'.

Поступило
7 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Sierpinski, Fund. Math., 1 (1920).

* В двоичном исчислении.