Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 2

МАТЕМАТИКА

П. К. РАШЕВСКИЙ

О ГЕОМЕТРИИ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 30 VI 1951)

Нашей целью является внесение геометрии аффинной связности в широкий класс однородных пространств.

Рассмотрим однородное пространство K_n, т. е. n-мерное многообразие, в котором задана (транзитивная) группа Ли G_r его преобразований в себя. Все рассмотрения ведем с локальной точки зрения. Пусть H_m — стационарная подгруппа группы G_r, заданная, очевидно, с точностью до внутренних автоморфизмов в G_r.

Будем обозначать через G_r' алгебру Ли группы G_r, а через H_m' — ее подалгебру, отвечающую стационарной подгруппе H_m.

В G_r' инвариантным образом можно ввести картанову метрику (вообще говоря, вырожденную), а именно, определить скалярный квадрат вектора $U \in G_r'$ как след квадрата аффинора

$$X \to [XU],$$

где X — любой вектор из G_r'.

1°. Мы ограничимся теми однородными пространствами K_n, для которых картанова метрика в G_r' является невырожденной по крайней мере на плоскости H_m'. Такие пространства мы будем называть аффинно-однородными. В этом случае в G_r' существует вполне определенное ортогональное дополнение к H_m' — плоскость, которую мы обозначим E_n' $(n = r - m)$. Бесконечно малые преобразования G_r, порождаемые векторами X из плоскости E_n', взаимно-однозначно отвечают переходам из данной точки $M \in K_n$ в бесконечно близкие точки M' и переносят при этом точку M вместе с ее окрестностью в точку M' с ее окрестностью (подразумевается, что H_m — стационарная подгруппа точки M). Тем самым в наше однородное пространство инвариантным образом вносится аффинная связность (вообще говоря, с кручением). Тензоры кривизны и кручения этой связности имеют ковариантные дифференциалы, тождественно равные нулю, т. е. сохраняются при параллельном перенесении. Далее, эта связность принадлежит геометрии однородного пространства, т. е. допускает группу G_r.

Построенную связность мы будем называть канонической связностью аффинно-однородного пространства.

2°. Возможно, что кроме канонической будут и иные аффинные связности, допускающие группу G_r. Для этого необходимо и достаточно существование тензорного поля вида $T^i_{jk} \neq 0$, допускающего группу G_r, для чего, в свою очередь, достаточно существование в одной какой-нибудь точке M тензора T^l_{jk}, допускающего стационарную подгруппу H_m (такой тензор преобразованиями G_r можно перенести в любую точку однородного пространства).

Добавляя тензор cT^l_{jk}, где c — произвольная константа, к объекту канонической связности Γ^l_{jk}, мы снова получаем связность, допускающую группу G_r. Но и в этом случае множественности аффинных связностей, допускающих G_r, введенная нами каноническая связность по своему построению инвариантно выделяется из их числа и играет особую роль.

Заметим, что если каноническая связность обладает кручением, то уже ее тензор кручения

$$S^l_{jk} = \Gamma^l_{jk} - \Gamma^l_{kj}$$

способен играть роль тензора T^l_{jk}.

3°. Теорема 1. *Для того чтобы кривая в аффинно-однородном пространстве была геодезической (в смысле канонической связности), необходимо и достаточно, чтоды она была траекторией одномерной подгруппы G_1 группы G_r при условии, что оператор подгруппы X_1 принадлежит плоскости $E_n \subset G_r$ для каждой точки M этой траектории; для этого достаточно, чтобы условие соблюдалось в одной какой-нибудь ее точке M_0.*

Теорема 2. *Если группа G_r полупростая компактная, то однородное пространство K_n является аффинно-однородным.*

Теорема 3. *Если стационарная подгруппа H_m группы G_r полупростая, то однородное пространство K_n является аффинно-однородным.*

Последние две теоремы показывают, что к числу аффинно-однородных принадлежит широкий класс однородных пространств.

4°. Если в аффинно-однородное пространство K_n можно внести риманову метрику, допускающую группу G_r (а следовательно, допускающую и каноническое параллельное перенесение), то аффинно-однородное пространство мы будем называть **метрическим**.

Если группа G_r — полупростая, то аффинно-однородное пространство K_n всегда будет метрическим: в него можно внести риманову метрику, определив скалярный квадрат бесконечно малого вектора MM' как скалярный квадрат соответствующего оператора плоскости E'_n в картановой метрике.

В частности, интересная геометрическая картина получается в случае, когда группа G_r — полупростая, а ее стационарная подгруппа H_m — максимальная регулярная абелева подгруппа. Тогда пространство K_n расслаивается $n/2$ способами на ∞^{n-2} двумерных вполне геодезических поверхностей F_2, несущих на себе (может быть знаконеопределенную) метрику поверхности постоянной кривизны, одинаковой для всех поверхностей данного семейства. Поверхности разных семейств, встречаясь в каждой точке M, образуют вполне ортогональные друг другу двумерные направления. Любое изометрическое (с сохранением ориентации) соответствие между двумя поверхностями F_2 одного семейства можно реализовать посредством движений (преобразований группы G_r) в пространстве K_n.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Всякое риманово пространство V_n с $ds^2 > 0$, допускающее транзитивную группу движений G_r, есть метрическое аффинно-однородное пространство, отвечающее группе G_r.*

5°. Каноническая связность Γ^l_{jk} аффинно-однородного пространства соответствует, в сущности говоря, не всей группе G_r, а ее наименьшей подгруппе $\tilde{G}$, содержащей все операторы X плоскости E_n'. Нетрудно заметить, что $\tilde{G}$ является нормальным делителем G_r (учитывая, что плоскость E_n' инвариантна относительно преобразований из H_m), а потому выбор точки M, для которой строится стационарная подалгебра H_m' и плоскость E_n', безразличен для определения группы $\tilde{G}$.

Если группа $\tilde{G}$ также удовлетворяет условию п. 1°, то она определяет каноническую связность, ту же самую, что и группа G_r. При этом группа $\tilde{G}$ (в отличие от G_r) может быть вполне восстановлена по своей канонической связности.

А именно, операторы X плоскости E_n', порождающие группу $\tilde{G}$, могут быть определены на основе канонической связности следующим образом. При смещении из данной точки M в бесконечно близкую точку M' мы переносим, пользуясь связностью, и направления, исходящие из M, и геодезические линии, идущие по этим направлениям, и, наконец, точки на этих геодезических (пользуясь инвариантностью канонического параметра на геодезических при преобразованиях группы G_r). Этим и будут восстановлены бесконечно малые преобразования плоскости E_n', а вместе с ними и вся группа $\tilde{G}$.

Конечно, в наиболее распространенном случае, когда $\tilde{G}$ совпадает с G_r, все сказанное переносится на G_r.

6°. Можно поставить вопрос о наибольшей группе преобразований, допускаемой канонической связностью Γ^i_{jk} аффинно-однородного пространства. Такой группой является нормализатор N группы $\tilde{G}$, т. е. совокупность преобразований пространства K_n, относительно которых группа $\tilde{G}$ является инвариантной. Конечно, N включает в себя G_r (и нормализатор G_r), причем может и совпадать с ними.

7°. В частном случае, когда каноническая связность аффинно-однородного пространства имеет нулевое кручение, мы возвращаемся к симметрическим пространствам аффинной связности Картана ([1]).

Научно-исследовательский институт механики и математики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
28 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Картан, Геометрия групп Ли и симметрические пространства, 1949.