Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 2

МАТЕМАТИКА

П. М. ОЛОНИЧЕВ

ОБЩЕАФФИННАЯ И ЦЕНТРАЛЬНО-ПРОЕКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ГИПЕРПОЛОС

(Представлено академиком И. Г. Петровским 27 VI 1951)

Определим центрально-аффинное пространство E_n как линейное пространство; тогда сопряженное к E_n линейное пространство $\tilde{E}_n$ будет пространством гиперплоскостей*. Принцип двойственности в E_n выражается в полном равноправии сопряженных пространств. $(m-1)$-мерной гиперполосой в E_n В. В. Вагнер называет $(m-1)$-мерную поверхность, с каждой точкой которой ассоциирована некоторая касательная гиперплоскость [2]. Параметрически гиперполоса определяется уравнениями

$$x = x(\eta^a), \quad \tilde{x} = \tilde{x}(\eta^a), \quad a,\ b,\ c = 1, \ldots, m-1,$$

причем, по определению, имеют место соотношения

$$\tilde{x}x = 1, \quad \tilde{x}x_a = 0, \quad \tilde{x}_a x = 0.$$

Рассматриваются лишь регулярные гиперполосы, т. е. гиперполосы, для которых дискриминант тензора $g_{ba} = \tilde{x}_b x_a$ отличен от нуля. С каждым элементом (η^a) гиперполосы ассоциируется базис $\{x,\ x_a,\ x_p\}$ в E_n и базис $\{\tilde{x},\ \tilde{x}_a,\ \tilde{x}^p\}$ в $\tilde{E}_n$. Векторы базисов связаны уравнениями

$$\tilde{x}_a x_p = 0, \quad \tilde{x} x_p = 0, \quad \tilde{x}^p x_a = 0, \quad \tilde{x}^p x = 0,$$
$$\tilde{x}^p x_q = \delta^p_q \quad (p, q = m+1, \ldots, n).$$

Так как гиперполоса определяется симметрично относительно E_n и $\tilde{E}_n$, то все выводы в теории гиперполосы сохраняют силу, если поменять местами E_n и $\tilde{E}_n$ (значит, в формулах можно перемещать знак $\sim$). Из разложения x_{ab}, x_{pa} в базисе $\{x, x_a, x_p\}$ в работе [2] находится симметричная линейная аффинная связность $\overset{1}{G}{}^c_{ab}$ в X_{m-1}, связующий аффинор $h_{ab}^{\cdot\cdot p}$, аффинная связность G^q_{ap}. Гиперполосой 2-го порядка называется гиперполоса, для которой базисная поверхность — $(m-1)$-мерная квадрика с определенным центром и гиперплоскости параллельны некоторому $(n-m)$-направлению. Соприкасающейся гиперполосой 2-го порядка в элементе (η^a) к данной гиперполосе называется гиперполоса 2-го порядка, огибающая гиперповерхность гиперплоскостей которой (гиперцилиндр) и гиперсемейство гиперплоскостей, касательных к базисной квадрике, имеют соприкосновение

* E_n (линейное пространство) считается дополненным бесконечно удаленными элементами [1, 2].

2-го порядка с соответствующими гиперповерхностью и гиперсемейством данной гиперполосы.

Пусть $a(y, y) + 2a(y) + a = 0$ — уравнение гиперцилиндра 2-го порядка произвольной соприкасающейся гиперполосы 2-го порядка и $b(\tilde{y}, \tilde{y}) + 2b(\tilde{y}) + b = 0$ — уравнение гиперсемейства гиперплоскостей, касательных к базисной квадрике. В этих определяющих уравнениях $b(,)$, $a(,)$ — билинейные функции, $a(\,)$, $b(\,)$ — линейные функции в соответствующих пространствах. Введем функции

$$\varphi(\bar{\eta}^a, \xi^p) = a[y(\bar{\eta}^a, \xi^p), y(\bar{\eta}^a, \xi^p)] + 2a[y(\bar{\eta}^a, \xi^p)] + a,$$
$$\psi(\bar{\eta}^a, \tilde{\xi}^p) = b[\tilde{y}(\bar{\eta}^a, \tilde{\xi}_p), \tilde{y}(\bar{\eta}^a \tilde{\xi}_p)] + 2b[\tilde{y}(\bar{\eta}^a, \tilde{\xi}_p)] + b,$$

где $y = x(\bar{\eta}^a) + x_p(\bar{\eta}^a)\xi^p$ — радиус-вектор точки огибающей гиперповерхности гиперполосы и $\tilde{y}$ — ковектор гиперплоскости, касательной к базисной поверхности гиперполосы в (η^a).

Потребуем для соприкасающейся гиперполосы 2-го порядка выполнения следующих условий аполярности:

$$g^{ba} \overset{1}{\nabla}_b \overset{1}{\nabla}_a \overset{1}{\nabla}_c \varphi = 0, \quad g^{ba} \overset{2}{\nabla}_b \overset{2}{\nabla}_a \overset{2}{\nabla}_c \psi = 0.$$

Кроме того, пусть центр базисной квадрики лежит в m-плоскости пересечения всех гиперплоскостей, касательных к базисной поверхности гиперполосы в (η^a), для которых след тензора $p_{ab} = g_{ab} - h_{ba}^{\cdot\cdot p}\xi^p$ равен нулю. Оказывается, что с помощью условий соприкосновения и вышеизложенных двух условий (при соответствующей нормировке) определяется однопараметрическое семейство соприкасающихся гиперполос в элементе (η^a) к данной гиперполосе, инвариантно ассоциированное с гиперполосой относительно общеаффинных преобразований. Для этого семейства

$$a(,) = g^{ba}\tilde{x}_b\tilde{x}_a - \frac{4}{m+1}A^a(\tilde{x}\tilde{x}_a) + (2+a)\tilde{x}\tilde{x},$$
$$a(\,) = -(1+a)\tilde{x} + \frac{2}{m+1}A^b\tilde{x}_b,$$
$$b(,) = g^{ba}x_a x_b + \frac{4}{m+1}A^b(x_b x) - 2\frac{h^p}{m-1}(x_p x) + (2+b)xx,$$
$$b(\,) = -(1+b)x - \frac{2}{m+1}A^c x_c + \frac{h^p}{m-1}x_p\,*;$$

параметры a, b связаны уравнением

$$2 + a + b - \frac{4}{(m+1)^2}A^b A_b = 0,$$

где

$$A^b = A_{ac}^{\cdot\cdot b} g^{ac}, \quad A_{ac}^{\cdot\cdot b} = {}^1/_2(\overset{2}{G}{}_{ac}^{b} - \overset{1}{G}{}_{ac}^{b}), \quad h^p = h_{ab}^{\cdot\cdot p} g^{ab}.$$

Геометрическим местом центров базисных квадрик указанного однопараметрического семейства гиперполос будет прямая

$$X_ц = \left(1 + \frac{1}{b}\right)x + \frac{2}{(m+1)b}A^m x_m - \frac{h^p}{(m-1)b}x_p,$$

* Под аффинором следует понимать оператор, соответствующий полилинейной функции, тогда каждые два вектора правой части равенств, стоящие рядом, представляют собой произведение ковариантных или контравариантных одновалентных аффиноров ([1]).

которую назовем аффинной нормалью. Она инвариантно ассоциирована с гиперполосой относительно общеаффинных преобразований и является аналогом известной аффинной нормали Бляшке. Гиперполосы из однопараметрического семейства назовем гиперполосами Дарбу. Гиперполоса Дарбу с параметром

$$h = -\frac{2}{(m+1)(m-1)} \overset{1}{\nabla}_b A^b - \frac{4}{(m+1)^2 (m-1)} A_b A^b - \frac{\tilde{h}_p h^p}{(m-1)^2} - 1$$

инвариантно связана с гиперполосой относительно общеаффинных преобразований и называется главной гиперполосой Дарбу. Центрально-проективные гиперполосы Дарбу и центрально-проективная нормаль определяются соответствующими формулами с перемещенной «тильдой».

Двузначная w-плотность ${}^*n = \pm |g|^{\frac{1}{m-1}} \left(x + \frac{2}{m+1} A^m x_m - \frac{h^p x_p}{m-1} \right)$ веса $\frac{2}{m-1}$, компонента которой является вектором в E_n, инвариантна относительно общеаффинных преобразований, и двузначная w-тензорная плотность ${}^*g_{ab} = \pm \frac{|g|^{-\frac{1}{m-1}}}{m-1} g_{ab}$ веса $-\frac{2}{m-1}$ инвариантна относительно проективных преобразований.

Определим ${}^*\tilde{n}$, ${}^*\tilde{x}_a$ ${}^*\tilde{x}^p$ из формул

$$
{}^*\tilde{x}_a x_b = {}^*g_{ab}, \quad {}^*\tilde{n}\, {}^*n = 1, \quad {}^*\tilde{x}^q x_p = \delta^q_p, \quad {}^*\tilde{x}_b\, {}^*n = 0, \quad {}^*\tilde{n} x_a = 0,
$$

$$
{}^*\tilde{x}^q\, {}^*n = 0, \quad {}^*\tilde{x}_b x_q = 0, \quad {}^*\tilde{n} x_q = 0, \quad {}^*\tilde{x}^q x_a = 0.
$$

Из разложения x_{ba} в базисе $\{{}^*n, x_a, x_p\}$ можно получить аффинную связность ${}^*\overset{1}{G}{}_{ba}^{c} = \overset{1}{G}{}_{ba}^{c} + \frac{2 g_{ab} A^c}{m+1}$ и с ее помощью записать систему дифференциальных уравнений в полных дифференциалах:

$$
{}^*\overset{1}{\nabla}_b x_a = {}^*g_{ba}\, {}^*n + {}^*h_{ba}{}^{p} x_p,
$$

$$
\nabla_b x_p = -\tilde{h}_{c\cdot p}^{\cdot b} x_b,
$$

$$
{}^*\overset{1}{\nabla}_c\, {}^*n = N_c^{\cdot m} x_m + N_c^{\cdot p} x_p.
$$

$N_c^{\cdot m}$, $N_c^{\cdot p}$ выражаются через другие геометрические объекты из условий интегрируемости системы. Отсюда можно сформулировать основную теорему общеаффинной теории гиперполосы.

При $m > 2$ заданием связующего аффинора ${}^*h_{ba}^{\cdot\cdot p}$, двузначной связующей w-аффинорной плотности ${}^*h_{abp}$ веса $-\frac{2}{m-1}$, симметричных по индексам a, b, двузначной w-тензорной плотности ${}^*g_{ab}$ веса $-\frac{2}{m-1}$ с $\mathrm{Det}\,|{}^*g_{ab}| = \pm \frac{1}{(m-1)^{m-1}}$, симметричной аффинной связности ${}^*\overset{1}{G}{}_{ab}^{c}$, аффинной связности G_{ap}^{q}, удовлетворяющих условиям интегрируемости системы, гиперполоса определяется с точностью до общеаффинного преобразования.

Несколько более сложными вычислениями из разложения ${}^*\tilde{n}$, ${}^*\tilde{x}_{bc}$ в базисе $\{{}^*\tilde{n}, {}^*\tilde{x}_b, {}^*\tilde{x}^p\}$ можно найти другую связность ${}^*\overset{2}{G}{}_{ab}^{c} = \overset{2}{G}{}_{ab}^{c} -$

$-\frac{4}{m+1}\, A_{(c}\, \delta_{b)}^{d}$ и с ее помощью дать вторую формулировку основной теоремы. Наконец, если ввести среднюю аффинную связность

$$\overset{0}{{}^*G}{}_{ab}^{c} = {}^1/_2 \left(\overset{1}{{}^*G}{}_{ab}^{c} + \overset{2}{{}^*G}{}_{ab}^{c} \right), \quad {}^*A_{ab}^{\cdot\cdot c} = {}^1/_2 \left(\overset{2}{{}^*G}{}_{ab}^{c} - \overset{1}{{}^*G}{}_{ab}^{c} \right)$$

(${}^*A_{ab}^{\cdot\cdot c}$ — аффинор, являющийся проективным инвариантом гиперполосы), то гиперполоса определяется с точностью до общеаффинного преобразования заданием ${}^*g_{ab}$, перенесения плотностей с помощью $\overset{0}{{}^*G}{}_c$, аффинора ${}^*A_{ab}^{\cdot\cdot c}$, связующих аффиноров ${}^*h_{ab}^{\cdot\cdot p}$, ${}^*h_{a\cdot p}^{\cdot b}$, связности G_{ap}^{q}, которые удовлетворяют соответствующим условиям интегрируемости.

Совершенно аналогично для центрально-проективной геометрии.

Используя эти общие результаты, можно рассмотреть ряд специальных гиперполос, например, аналог собственных и несобственных аффинных сфер. В частном случае из построенной теории гиперполосы следует общеаффинная и центрально-проективная теория гиперповерхности, рассмотренная В. В. Вагнером.

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступило
16 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. П. Норден, Пространства аффинной связности, 1950. [2] В. В. Вагнер, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 8, 197 (1950).