Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 2

МАТЕМАТИКА

В. В. НЕМЫЦКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СТРУКТУРЫ СПЕКТРА НЕЛИНЕЙНЫХ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 VII 1951)

1. Пусть дано операторное уравнение $\lambda\varphi = A(\varphi)$, где $A(\varphi)$ — оператор, действующий в пространстве Банаха и значения которого тоже принадлежат этому же пространству Банаха; кроме того, мы будем предполагать, что $A(\theta) = \theta$, хотя это последнее предположение несущественно. Число λ_0 и элемент пространства φ_0 будем называть, соответственно, собственным элементом и собственной функцией $A(\varphi)$, если $\|\varphi_0\| \neq 0$ и $\lambda_0\varphi_0 = A(\varphi_0)$. Совокупность собственных чисел мы будем называть «спектром» оператора $A(\varphi)$. Случай $\lambda_0 = 0$ мы не исключаем, однако $\lambda_0 = 0$ следует считать исключительной точкой спектра, даже если она к нему принадлежит. Пополненным спектром мы назовем спектр $A(\varphi)$, к которому присоединена точка $\lambda_0 = 0$. Если не предполагать оператор $A(\varphi)$ вполне непрерывным, то спектр может быть произвольным множеством. Однако, если $A(\varphi)$ вполне непрерывен, т. е. непрерывен и отображает любое ограниченное множество в компактное, то структура спектра упрощается.

2. Обозначим через $\Lambda[a, b]$ совокупность тех точек спектра, которым соответствуют собственные элементы φ, нормы которых заключены между a и b.

Лемма 1. *Множество $\Lambda[a, b] \cup 0$ замкнуто.*

Теорема 1. *Спектр вполне непрерывного оператора — множество типа F_σ.*

Лемма 1 позволяет выделить особые предельные точки спектра — это точки, не принадлежащие спектру и такие, что, каковы бы ни были положительные числа M и m и $\varepsilon > 0$, для порции спектра, заключенной на отрезке $[\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$, собственные функции будут иметь норму либо бо́льшую M, либо меньшую m, либо то и другое. Примеры показывают, что для нелинейных вполне непрерывных операторов подобные точки могут существовать.

Теорема 2. *Если оператор $A(\varphi)$ таков, что*

$$\lim_{\|\varphi\|\to 0} \frac{\|A(\varphi)\|}{\|\varphi\|} = 0, \qquad \lim_{\|\varphi\|\to\infty} \frac{\|A(\varphi)\|}{\|\varphi\|} = \infty,$$

то пополненный спектр есть замкнутое множество.

Прилагая эту теорему к нелинейному оператору вида

$$A(\varphi) = L[H(\varphi)],$$

где $L[m]$ — вполне непрерывный линейный оператор, а $H(\varphi)$ — точечный непрерывный оператор, который мы будем считать ограниченным в том смысле, что он все пространство переводит в ограниченное множество, получим теорему 3.

Теорема 3. *Если $L[u]$ — вполне непрерывный линейный оператор и $H(\varphi)$ — точечный ограниченный оператор такой, что $\frac{|H(u)|}{|u|} \to 0$, $|u| \to 0$, то пополненный спектр $A(\varphi) = L(H(\varphi))$ есть замкнутое множество.*

Эта теорема легко позволяет на основании одного результата Вайнберга [1] установить непустоту спектра подобного класса операторов.

3. Выясним теперь условия, при выполнении которых спектр содержит внутренние точки (будет областным).

Лемма 2. *Для того чтобы точка λ_0 спектра $A[\varphi]$ была внутренней, достаточно, чтобы существовало такое η, чтобы оператор $B_\lambda = \lambda E - A$ давал топологическое отображение окрестности элемента φ_0 для любого λ, удовлетворяющего неравенству $|\lambda - \lambda_0| < \eta$.*

Эта лемма позволяет установить следующий достаточный признак.

Теорема 4. *Если оператор $A[\varphi]$ таков, что, каково бы ни было φ_0, $\|\varphi_0\| \neq 0$, можно найти столь малое h, что из условий $\|\eta_1(x)\| \leqslant h$ и $|\eta_2(x)| \leqslant h$ вытекает выполнение одного из неравенств*

$$\frac{\|A(\varphi_0+\eta_1) - A(\varphi_0+\eta_2)\|}{\|\eta_1 - \eta_2\|} \geqslant \frac{\|A(\varphi_0)\|}{\|\varphi_0\|} + \gamma_{\varphi_0},$$

$$\frac{\|A(\varphi_0+\eta_1) - A(\varphi_0+\eta_2)\|}{\|\eta_1 - \eta_2\|} \leqslant \frac{\|A(\varphi_0)\|}{\|\varphi_0\|} + \gamma_{\varphi_0},$$

где γ_{φ_0} — некоторая константа, то λ_0 — внутренняя точка спектра.

Дальнейшие теоремы характеризуют «устойчивость» свойства иметь λ_0 внутренней точкой спектра.

Лемма 3. *Если вполне непрерывный оператор $A(\varphi)$ таков, что оператор $B_{\lambda_0} = \lambda_0 E - A$ дает взаимно-однозначное и взаимно-равномерно непрерывное отображение окрестности U_{φ_0} собственного элемента φ_0, то существует такое $\varepsilon > 0$, что оператор $A[\varphi] - \omega(\varphi)$ имеет λ_0 своим собственным значением, если $\|\omega(\varphi)\| \leqslant \varepsilon$ для всех $\varphi \in u_{\varphi_0}$.*

Если записать операторное уравнение $(\lambda_0 + \mu)\varphi = A(\varphi)$ в виде $\lambda_0\varphi = A(\varphi) - \mu\varphi$, то лемма 3 дает условие того, что λ_0 есть внутренняя точка спектра.

При доказательстве этой леммы мы используем результат Роте [2] о том, что взаимно-однозначное и взаимно-равномерно непрерывное отображение имеет степень 1 в смысле Лерея и Шаудера [3].

Лемма 4. *Если $A[\varphi]$ — вполне непрерывный оператор, если F — замкнутое ограниченное множество, лежащее вне сферы $S(0, \rho)$ и если на F выражение*

$$D_\varphi = \|\lambda_0\varphi - A(\varphi) - \varphi_0\| \neq 0,$$

то существует такая константа d, что $D_\varphi > d > 0$ на F.

Эта лемма является мало существенной модификацией одной леммы М. А. Красносельского.

Теорема 5. *Пусть $A(\varphi)$ — вполне непрерывный оператор; пусть операторы $B_{\lambda+\mu}\varphi = A[\varphi] - (\lambda+\mu)\varphi$ дают взаимно-однозначные и взаимно-равномерно непрерывные отображения окрестности некоторого элемента φ_0 при $|\mu| \leqslant \mu_0$ и пусть $\overline{A}[\varphi] = A[\varphi] + \omega(\varphi)$ — вполне непрерывный оператор, для которого λ_0 и φ_0 являются, соответственно, собственным значением и собственным элементом. Тогда λ_0 есть внутренняя точка спектра оператора $\overline{A}[\varphi]$, если $\|\omega(\varphi)\| \leqslant d_\mu$ для $\varphi \in T_{\varphi_0}$.*

Доказанные теоремы позволяют в качестве операторов сравнения брать линейные операторы и получать теоремы о продолжении решений. Однако следует указать, что тонкие результаты Лерея и Шаудера ([3]) и М. А. Красносельского ([4]) и продолжение решений около собственного элемента нечетной кратности на этом пути получить нельзя. Ценность наших теорем не в этом — они позволяют в качестве операторов сравнения брать и нелинейные операторы.

4. Последний вопрос, который мы затронем в нашей заметке, — это вопрос о структуре B_λ — множеств собственных элементов, соответствующих λ. Сразу видно, что B_λ — замкнутые множества.

Теорема 6. *Если $A[\varphi]$ — вполне непрерывный и дифференцируемый оператор и если λ_0 есть собственное значение оператора $A[\varphi]$, но не есть собственное значение $L[\varphi]$ линейной части $A[\varphi]$, то λ_0 может соответствовать лишь конечное число собственных функций φ, нормы которых удовлетворяют неравенствам*

$$0 \leqslant a \leqslant \|\varphi\| \leqslant l < \infty.$$

Заканчивая заметку, надеюсь, что затронутые здесь вопросы привлекут внимание математиков, так как мне представляется, что накопилось уже достаточно отдельных фактов, чтобы было своевременно создать общую теорию нелинейных операторов, выделив из всевозможных нелинейных операторов такие классы, для которых эта теория окажется достаточно богатой интересными фактами.

Научно-исследовательский институт математики и механики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
4 VII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Вайнберг, Матем. сборн., **26** (68) : 3, 389 (1950). [2] E. Rothe, Compositio Math., **5**, 177 (1937). [3] Ж. Лерей и Ю. Шаудер, Усп. матем. наук, **1**, в. 3—4 (13—14), 71 (1946). [4] М. А. Красносельский, ДАН, **74**, № 4 (1950).