Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 2

МАТЕМАТИКА

В. М. ГЛУШКОВ

О ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 9 VII 1951)

Настоящая заметка посвящена изучению локально нильпотентных групп без кручения с условиями обрыва убывающих и возрастающих цепей сервантных подгрупп или сервантных нормальных делителей. Целью этого изучения является установление связей таких групп с нильпотентными группами конечного специального ранга (1), а также с локально нильпотентными расширениями абелевых групп посредством групп конечных специальных рангов. При решении подобных вопросов существенную помощь оказывает ряд предложений, относящихся к общей теории локально нильпотентных групп без кручения (теоремы 1—7). Эти предложения имеют также и самостоятельное значение.

Следуя С. Н. Черникову (2), назовем возрастающим рациональным рядом группы такой ее возрастающий нормальный ряд (3), все факторы которого являются локально циклическими группами без кручения. Тогда имеет место теорема 1.

Теорема 1. *Локально нильпотентная группа без кручения тогда и только тогда является нильпотентной группой конечного специального ранга k, когда она обладает конечным рациональным рядом длины k.*

Следствие. В нильпотентной группе без кручения конечного специального ранга k любая возрастающая или убывающая цепочка сервантных подгрупп имеет не более $k+1$ членов.

В работе А. И. Мальцева (4) показано, что общий ранг локально нильпотентной группы без кручения может уменьшаться при переходе к пополнению. Для специального ранга из работы (5) и только что полученной теоремы легко следует теорема 2.

Теорема 2. *Специальный ранг локально нильпотентный группы без кручения равен специальному рангу ее пополнения.*

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{G}$ — локально нильпотентная группа без кручения, $\mathfrak{A}$ — ее сервантный нормальный делитель, $\mathfrak{G}^*$ — пополнение $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{G}^*$ — пополнение $\mathfrak{A}$. Тогда специальные ранги фактор-групп $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{A}^*$ равны между собой.*

Теорема 4. *В локально нильпотентной группе без кручения конечное множество подгрупп конечных специальных рангов порождает нильпотентную подгруппу конечного специального ранга.*

Известный пример p-группы без центра, построенный О. Ю. Шмидтом (6), показывает, что предложение, аналогичное теореме 4, для периодических групп не имеет места.

Теорема 5. *Композит любого множества полных,* в смысле *неограниченной извлекаемости корня, подгрупп локально нильпо-*

тентной группы без кручения является полной подгруппой (в том же смысле).

Следствие. Если в локально нильпотентной группе без кручения из каждого элемента некоторой системы образующих неограниченно извлекается корень, то группа полна в смысле неограниченной извлекаемости корня.

Теорема 5 и следствие из нее теряют силу для периодических групп, как показывает пример § 3 из ([7]).

Если условиться под полнотой понимать исключительно полноту в смысле неограниченной извлекаемости корня, то имеет место следующее обобщение теоремы 6 из ([5]).

Теорема 6. *В полной локально нильпотентной группе без кручения все члены нижнего центрального ряда (вообще говоря, не доходящего до единицы) являются полными группами.*

Заметим, что, развивая метод И. Д. Адо ([8]), нетрудно построить пример локально нильпотентной группы без кручения, совпадающей со своим коммутантом. Таким образом, нижний центральный ряд локально нильпотентной группы без кручения может состоять из одного единственного члена.

Теорема 7. *Локально нильпотентная группа без кручения обладает центральной системой ([3]), состоящей из сервантных нормальных делителей.*

Назовем ZAF-группой ZA-группу, все факторы верхнего центрального ряда которой имеют конечные специальные ранги. M_0-группами будем называть локально нильпотентные группы без кручения с условием минимальности для сервантных нормальных делителей. Тогда из теоремы 7 легко вывести, что всякая M_0-группа является ZAF-группой. Вопрос о том, не является ли всякая ZAF-группа без кручения M_0-группой, в общем случае остается открытым.

Теорема 8. *M_0-группа разрешима, т. е. обладает убывающим рядом коммутантов конечной длины.*

Теорема 7 позволяет также сформулировать следующее обобщение теоремы 12 из ([2]).

Теорема 9. *Нильпотентные группы без кручения конечного специального ранга и только они являются локально нильпотентными группами без кручения с условием минимальности для сервантных подгрупп.*

Теорема 10. *Нильпотентные группы без кручения конечного специального ранга и только они являются локально нильпотентными группами без кручения с условием максимальности для сервантных нормальных делителей.*

Следствие. Для локально нильпотентных групп без кручения условия максимальности для сервантных подгрупп и для сервантных делителей эквивалентны.

Теорема 11. *Нильпотентные группы без кручения с конечным числом образующих и только они являются локально нильпотентными группами с условием максимальности для нормальных делителей.*

Из теоремы 11 легко следует эквивалентность условий максимальности для подгрупп и для нормальных делителей в случае произвольных локально нильпотентных групп, что является обобщением одного из результатов работы ([9]).

Теорема 12. *Для того чтобы группа без кручения, являющаяся расширением ZA-группы посредством группы конечного специального ранга, была ZA-группой, необходимо и достаточно, чтобы она была локально нильпотентной.*

Теорема 13. *Для того чтобы группа без кручения, являющаяся расширением M_0-группы посредством ZA-группы, была ZA-груп-*

пой, необходимо и достаточно, чтобы она была локально нильпотентной.

Теорема 14. *Для того чтобы группа, распадающаяся в полупрямое произведение двух ZA-групп, была ZA-группой, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла нормализаторному условию.*

Теорема 15*. *Локально нильпотентная группа $\mathfrak{G}$, являющаяся расширением своего абелева нормального делителя $\mathfrak{A}$ посредством группы конечного специального ранга, является ZA-группой, верхний центральный ряд которой имеет длину либо k, либо $\omega + k$, где k — натуральное, а ω — первое предельное порядковое число, причем во втором случае $\mathfrak{A}$ содержится в ω-м гиперцентре группы $\mathfrak{G}$.*

Теорема 16. *ZAF-группа без кручения, являющаяся расширением абелевой группы посредством группы специального ранга единица, является M_0-группой.*

Поскольку для абелевых p-групп условие минимальности для подгрупп эквивалентно конечности специального ранга ([10]), то один из основных результатов работы ([11]) может быть сформулирован так: всякая ZAF-p-группа является расширением прямого произведения конечного числа квазициклических p-групп посредством конечной p-группы, а длина верхнего центрального ряда такой группы всегда меньше второго предельного порядкового числа.

Естественно поэтому предположить, что всякая ZAF-группа без кручения, или хотя бы M_0-группа, является расширением абелевой группы посредством группы конечного специального ранга. Однако и то и другое оказывается неверным. Именно, используя аппарат бесконечных треугольных матриц, удается построить пример M_0-группы, верхний центральный ряд которой имеет длину $\omega \cdot 2 + 1$, где ω означает первое предельное порядковое число. Ввиду торемы 15, эта группа не может быть расширением абелевой группы посредством группы конечного специального ранга.

Ниже дается два простых критерия, при выполнении которых M_0-группа представляет собою расширение абелевой группы посредством группы конечного специального ранга. При установлении этих критериев значительную помощь оказывает следующее предложение, представляющее и самостоятельный интерес.

Теорема 17. *Во всякой ZA-группе $\mathfrak{G}$ существует такой максимальный абелев нормальный делитель, что его пересечение с любым гиперцентром группы $\mathfrak{G}$ является максимальной абелевой подгруппой в этом гиперцентре.*

Теорема 18. *Для того чтобы M_0-группа являлась расширением абелевой группы посредством группы конечного специального ранга, необходимо и достаточно, чтобы один из ее максимальных абелевых нормальных делителей содержался в ее гиперцентре с номером, не превосходящим первого предельного порядкового числа.*

Теорема 19. *Для того чтобы M_0-группа являлась расширением абелевой группы посредством группы конечного специального ранга, необходимо и достаточно, чтобы ее верхний центральный ряд имел длину меньшую, чем второе предельное порядковое число.*

Из теорем 18 и 19 непосредственно следует, что длина верхнего ряда M_0-группы тогда и только тогда меньше второго предельного порядкового числа, когда один из максимальных абелевых нормальных делителей группы содержится в ее гиперцентре с номером, не превосходящим первого предельного порядкового числа. Однако, если один из максимальных абелевых нормальных делителей M_0-группы содержится в ее гиперцентре с первым предельным порядковым но-

---

* Н. Ф. Сесекин сообщил мне, что им получен аналогичный результат.

мером, другие максимальные абелевы нормальные делители группы, вообще говоря, не обязаны обладать этим свойством.

Поступило
9 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Мальцев, Матем. сборн., **22** (64), 351 (1948). [2] С. Н. Черников, Уч. зап. Уральск. гос. ун-та им. А. М. Горького, **7**, 3 (1950). [3] А. Г. Курош и С. Н. Черников, Усп. матем. наук, **2**, в. 3, 18 (1947). [4] А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., **13**, 201 (1949). [5] В. М. Глушков, ДАН, **74**, № 5, 885 (1950). [6] О. Ю. Шмидт, Матем. сборн., **8** (50) : 3, 363 (1940). [7] С. Н. Черников, там же, **18** (60), 397 (1946). [8] И. Д. Адо, ДАН, **40**, 339 (1943). [9] S. A. Jennings, Bull. Am. Math. Soc., **50**, 759 (1944). [10] Н. Н. Мягкова, Изв. АН СССР, сер. матем., **13**, 495 (1949). [11] Х. Х. Мухаммеджан, Матем. сборн., **28** (70) : 1, 185 (1951).