Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 2

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЛАЗМАН

О СПЕКТРЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 VII 1951)

Настоящая заметка посвящена исследованию характера спектра самосопряженного дифференциального оператора $\tilde{L}$, порожденного операцией

$$l[y] = (-1)^n y^{(2n)} + q(x) y \qquad (a < x < b, \ -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty), \tag{1}$$

где

$$\int_\alpha^\beta |q(x)|\, dx < \infty$$

при любых α и β $(a < \alpha, \beta < b)$. Выяснение характера спектра ведется теоретико-операторным методом. Для случая $n = 1$ часть устанавливаемых критериев была получена ранее различными методами, не допускающими, вообще говоря, обобщения на общий случай (1). Применяемый ниже метод «расщепления» позволяет также получить некоторые результаты для случая дифференциальной операции в частных производных

$$-\Delta u + q(x_1, x_2, \ldots, x_n) u \qquad (-\infty < x_k < +\infty, \ k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Условимся обозначать через L оператор, порождаемый операцией (1) на многообразии $\mathfrak{D}_L$ функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям: 1) $\varphi(x) = 0$ вне интервала (α, β), зависящего от φ; 2) $\varphi(x), \varphi'(x), \ldots \ldots, \varphi^{(2n-1)}(x)$ абсолютно непрерывны; 3) $l[\varphi] \in \mathscr{L}^2(a, b)$. Самосопряженное расширение оператора L будем обозначать $\tilde{L}$ (ниже знак тильды используется для обозначения самосопряженных расширений).

Назовем расщеплением оператора L в точке $x = \gamma$ сужение многообразия $\mathfrak{D}_L$ дополнительным условием $\varphi(\gamma) = \varphi'(\gamma) = \cdots = \varphi^{(2n-1)}(\gamma) = 0$.

Обозначая оператор, порождаемый L на суженном многообразии, через L_0, имеем

$$L_0 = L_1 \oplus L_2, \tag{3}$$

где L_1 и L_2 — операторы, порожденные, аналогично оператору L, той же операцией (1) в пространствах $\mathscr{L}^2(a, \gamma)$ и $\mathscr{L}^2(\gamma, b)$. Если теперь расширить L_1, L_2 до $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$, то получим некоторое расширение $\tilde{L}_0$ по формуле

$$\tilde{L}_0 = \tilde{L}_1 \oplus \tilde{L}_2. \tag{4}$$

При этом спектр оператора $\tilde{L}_0$ является, очевидно, теоретико-множественной суммой спектров операторов $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_2$. В силу конечности индекса дефекта оператора L_0 непрерывные части спектров всех самосопряженных расширений совпадают. В частности, совпадают непрерывные части спектров операторов $\tilde{L}_0$ и $\tilde{L}$.

Теорема 1. *Если* $\lim\limits_{x \to b} q(x) = +\infty$ *и* a — *регулярный конец интервала, то спектр оператора* $\tilde{L}$ *дискретен.*

Для доказательства достаточно выбрать точку расщепления γ_m так, чтобы для $x > \gamma_m$ было $q(x) > m$. При таком расщеплении оператор $\tilde{L}_1$ в (4) регулярен и, следовательно, его спектр дискретен, а оператор L_2 ограничен снизу числом m

$$(L_1 \varphi, \varphi) = \int\limits_a^b |\varphi^{(n)}(x)|^2 dx + \int\limits_a^b q(x) |\varphi(x)|^2 dx > m(\varphi, \varphi),$$

так что спектр оператора $\tilde{L}_2$ левее точки m дискретен и, в силу произвольности m, теорема доказана.

Для случая $n = 1$, $b = \infty$ доказанная теорема дает известный критерий, установленный Г. Вейлем в классической работе (1) с помощью теорем сравнения Штурма в предположении монотонности $q(x)$ и обобщенный на случай немонотонных $q(x)$ Титчмаршем (2).

Из спектрального представления самосопряженных операторов A в гильбертовом пространстве H легко видеть, что необходимым* и достаточным условием отсутствия в интервале $[\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ точек непрерывной части спектра оператора A является выполнение неравенства $\|(A - \lambda_0 E) f\| > \delta \|f\|$ при всех $f \in \mathfrak{D}_A \cap G$ (где $H \ominus G$ конечномерно). Отсюда следует лемма 1.

Лемма 1. *Если интервал* $[\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ *свободен от непрерывной части спектра оператора* A, *а* Q — *самосопряженный оператор с нормой* $\|Q\| \leqslant \delta_0 < \delta$, *то точка* λ_0 *не принадлежит непрерывной части спектра самосопряженного оператора* $A + Q$.

Теорема 2. *Если* $b = \infty$ *и* $\overline{\lim\limits_{x \to \infty}} |q(x)| = M$, *то любой интервал длины* $2\delta > 2M$ *полуоси* $\lambda > 0$ *содержит точки непрерывной части* S *спектра оператора* $\tilde{L}$.

Доказательство. Предположим, что $\lambda_0 > 0$, но интервал $[\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ не содержит точек S. Тогда при любом расщеплении оператор $\tilde{L}_2$ в (4) не будет иметь точек непрерывной части спектра в этом интервале. Если выбрать теперь точку расщепления γ так, чтобы для $x > \gamma$ было $|q(x)| \leqslant \delta_0 < \delta$, то, пользуясь леммой 1, получим, что точка λ_0 не принадлежит спектру оператора $\tilde{P}_n$, порожденного операцией $(-1)^n d^{2n} / dx^{2n}$, что абсурдно, так как непрерывная часть спектра оператора $\tilde{P}_n$ покрывает всю полуось $\lambda > 0$.

При $n = 1$ доказанное предложение усиливает последнюю теорему статьи (3) Фридрихса, утверждающую, что при $\overline{\lim\limits_{x \to \infty}} |q(x)| < \infty$ у оператора $\tilde{L}$ существует по крайней мере одна точка непрерывной части спектра.

Полагая в теореме 2 $M = 0$, получаем следующий результат:

Теорема 2а. *Если* $b = \infty$ *и* $\lim\limits_{x \to \infty} q(x) = 0$, *то вся полуось* $\lambda > 0$ *покрыта непрерывной частью спектра оператора* $\tilde{L}$.

Доказательству этой теоремы при $n = 1$ в предположении непрерывности $q(x)$ посвящена статья Гартмана (4), в которой используется искусственная и сложная конструкция.

---

* Дискретная часть спектра A предполагается конечнократной.

Элементарное преобразование позволяет вывести из теоремы 2 более точный результат.

Теорема 2б. *Если* $b=\infty$, $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\, q(x)=\rho<\infty$, $\underline{\lim\limits_{x\to\infty}}\, q(x)=\sigma>-\infty$, *то любой интервал длины большей* $\rho-\sigma$ *полуоси* $\lambda>{}^1/_2(\rho+\sigma)$ *содержит точки непрерывной части спектра оператора* $\tilde{L}$.

Доказательство получается заменой $q(x)$ на $q(x)-{}^1/_2(\rho+\sigma)$.

Получению этой теоремы для случая $n=1$ в предположении непрерывности $q(x)$ посвящена статья Рутнэма [5].

Теорема 3. *Пусть a — регулярный конец интервала, а $b=\infty$. Если при $x\to\infty$ $q(x)$ стремится к нулю снизу и притом так, что*

$$\int^{\infty} |q(x)|\,dx=\infty, \tag{5}$$

то отрицательная часть спектра оператора $\tilde{L}$ дискретна и имеет предельной точкой $\lambda=0$.

Доказательство. Выберем точку расщепления γ так, чтобы для $x>\gamma$ было $q(x)>-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$. При таком расщеплении оператор $\tilde{L}_1$ регулярен и, следовательно, имеет дискретный спектр с единственной предельной точкой $\lambda=+\infty$, а оператор L_2 ограничен снизу числом $\lambda=-\varepsilon$, так что спектр оператора $\tilde{L}_2$ левее $\lambda=-\varepsilon$ состоит из конечного числа собственных значений. Таким образом, спектр оператора $\tilde{L}$ левее $\lambda=-\varepsilon$ состоит из конечного числа собственных значений. В силу произвольности $\varepsilon>0$ получаем, что отрицательная часть спектра оператора $\tilde{L}$ дискретна и ограничена снизу. Остается показать, что при условии (5) имеется бесконечное число отрицательных собственных значений. С этой целью выберем α так, чтобы при $x>\alpha$ было $q(x)<0$, и построим функцию $\varphi_1(x)$, равную нулю вне интервала (α,β), равную единице в интервале (α_1,β_1), где $\alpha<\alpha_1<\beta_1<\beta$, и принадлежащую $\mathfrak{D}_L$. Для этой функции

$$(L\varphi_1,\varphi_1)<\left\{\int\limits_{\alpha}^{\alpha_1}+\int\limits_{\beta_1}^{\beta}\right\}|\varphi^{(n)}(x)|^2\,dx+\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} q(x)\,dx;$$

при этом, в силу (5), при достаточно большом β_1 (и надлежащем способе определения $\varphi_1(x)$ при $\alpha<x<\alpha_1$ и $\beta_1<x<\beta$) будет $(L\varphi_1,\varphi_1)<0$. Проводя аналогичное построение за точкой $x=\beta$, получим функцию $\varphi_2\in\mathfrak{D}_2$, для которой $(L\varphi_2,\varphi_2)<0$. Продолжая неограниченно этот процесс, получим бесконечномерное подпространство F (определяемое ортогональным базисом $\varphi_1,\varphi_2,\ldots$), на котором $(L\varphi,\varphi)<0$, что невозможно в случае конечного числа отрицательных собственных чисел оператора $\tilde{L}$.

Лемма 2. *Если $\lambda\geqslant 0$, то для любого $\delta>0$ существует функция $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, удовлетворяющая следующим условиям:* 1) $\|u\|=1$; 2) *u, ∇u непрерывны;* 3) *$u=0$ внутри гиперсферы радиуса R_0 и вне гиперсферы радиуса R (центр гиперсфер в начале координат, R_0 не зависит от δ);* 4) $\|\Delta u+\lambda u\|<\delta$.

Для $m=1$ справедливость леммы следует из неограниченности оператора $(\tilde{P}_1-\lambda E)^{-1}$ (см. доказательство теоремы 2) и конечности индекса дефекта оператора P_1. Для любого m лемму легко установить методом индукции, полагая $u(x_1,x_2,\ldots,x_k)=v(x_1)\,w(x_2,\ldots,x_k)$.

Теорема 4. *Если* $\lim q(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$ *при стремлении* $r^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ *в бесконечность, то непрерывная часть S спектра самосопряженного оператора $\tilde{L}$, порожденного операцией* (2), *заполняет полуось* $\lambda>0$.

Доказательство. Из предположения $\lambda_0 \overline{\in} S$, $\lambda_0 > 0$ следует существование $\varepsilon > 0$ такого, что $\|(L - \lambda E) u\| > \varepsilon \|u\|$ при всех $u \in \mathfrak{D}_L$, где оператор L порожден операцией (2) по способу, аналогичному описанному в начале заметки. Расщепим оператор L по формуле (3), полагая на упомянутых в лемме 2 гиперсферах функции φ из $\mathfrak{D}_L$ равными нулю вместе с $\nabla\varphi$. Выбирая теперь R_0 так, чтобы было $|q| < \varepsilon$ при $r > R_0$, получим для любой функции u, удовлетворяющей условиям леммы 2, неравенство $\|\Delta u + \lambda u\| > (\varepsilon - \varepsilon_0)\|u\|$, что противоречит утверждению леммы 2.

Харьковский политехнический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
4 VII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Weyl, Math. Ann., 68, 220 (1910). [2] E. C. Titchmarsh, Eigenfunctions Expansions..., Oxford, 1946. [3] K. O. Friedrichs, Studies and Essays Presented to R. Courant, 145—160, N. Y., 1948. [4] P. Hartman, Am. Journ. Math., 71, 71 (1949). [5] C. R. Rutnam, ibid., 71, 612 (1949).