Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 2

МАТЕМАТИКА

Р. М. ГЕЙДЕЛЬМАН

КОНФОРМНОЕ ИЗГИБАНИЕ ТРЕХМЕРНОГО КОМПЛЕКСА ОКРУЖНОСТЕЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 27 VI 1951)

1. Пусть в трехмерном конформном пространстве дано многообразие окружностей, зависящее от трех параметров. Будем называть его комплексом окружностей. К каждой окружности комплекса присоединим локальный конформный репер Картана, состоящий из двух точек A и A_4 и трех единичных взаимно ортогональных сфер S_1, S_2, S_3, проходящих через эти точки, так, чтобы сферы S_2 и S_3 проходили бы через окружность комплекса.

Компоненты инфинитезимального конформного преобразования элементов этого репера обозначим через ω_α^β ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4$). Они являются формами Пфаффа от параметров комплекса. Главными формами являются формы ω^2, ω_1^2, ω_2^0, ω^3, ω_1^3, ω_3^0. При равенстве их нулю окружность комплекса остается на месте.

Будем считать формы ω^2, ω_1^2, ω_1^3 линейно независимыми на комплексе. При подходящем выборе репера это не наложит никаких ограничений на комплекс. Тогда на комплексе

$$\omega^3 = a^3\omega^2 + b^3\omega_1^2 + c^3\omega_1^3; \quad \omega_3^0 = a_3^0\omega^2 + b_3^0\omega_1^2 + c_3^0\omega_1^3;$$
$$\omega_2^0 = a_2^0\omega^2 + b_2^0\omega_1^2 + c_2^0\omega_1^3.$$

Фиксированием одного вторичного параметра приводим a^3 к нулю (1). Если все окружности комплекса не касаются одной поверхности, то при подходящей нормировке точки A и выборе точки A_4 на окружности можно b^3 привести к единице, а c^3 — к нулю.

Тогда комплекс окружностей будет определяться системой:

$$\omega^3 = \omega_1^2; \quad \omega_3^0 = a_3^0\omega^2 + b_3^0\omega_1^2 + c_3^0\omega_1^3; \quad \omega_2^0 = a_2^0\omega^2 + b_2^0\omega_1^2 + c_2^0\omega_1^3. \tag{1}$$

Если комплекс представляет собою ∞^3 окружностей, касающихся поверхности (A), то $b^3 = c^3 = 0$ и, канонизируя репер, можно привести c^3 к нулю, c_2^0 к 1 и b_2^0 — к 0, и уравнения, определяющие такой комплекс, имеют вид:

$$\omega^3 = 0; \quad \omega_3^0 = a_3^0\omega^2 + b_3^0\omega_1^2 + c_3^0\omega_1^3; \quad \omega_2^0 = a_2^0\omega^2 + \omega_1^2. \tag{2}$$

2. Пользуясь обобщением понятия изгибания, данного Картаном для любых геометрических образов в любой группе преобразований, будем называть два комплекса окружностей K и $\dot{K}$ конформно наложимыми порядка n, если между окружностями обоих комплексов установлено взаимно-однозначное соответствие и каждой паре соответствующих окружностей $[S_2 S_3]$ и $[\dot{S}_2\dot{S}_3]$ ассоциируется конформное

преобразование T, переводящее комплекс $\overset{*}{K}$ в комплекс $\overline{K}$ так, что окружность $[S_2 S_3]$ совпадает с окружностью $[\overline{S}_2\overline{S}_3]$, а все бесконечно близкие окружности совпадут с соответствующими до бесконечно малых порядка n включительно.

Из работы ([2]) следует, что комплекс не допускает изгибания порядка 2 и произвольный комплекс, вообще говоря, неизгибаем.

Отнесем комплекс K к реперу R, канонизированному как указано выше, а комплекс $\overset{*}{K}$ к реперу $\overset{*}{R}$ такому, что ассоциированное конформное преобразование T переводит $\overset{*}{R}$ в R. Тогда система уравнений, определяющая конформно наложимую порядка 1 пару комплексов, примет вид:

$$\overset{*}{\omega}{}^3 = \omega^3; \quad \overset{*}{\omega}{}^3_1 = \varphi^3_1; \quad \overset{*}{\omega}{}^0_3 = \omega^0_3; \quad \overset{*}{\omega}{}^2 = \omega^2; \quad \overset{*}{\omega}{}^2_1 = \omega^2_1; \quad \overset{*}{\omega}{}^0_2 = \omega^0_2. \tag{3}$$

Для исследования этой системы уравнений Пфаффа применим метод внешних форм ([1]).

Внешние дифференциалы системы уравнений (3) имеют вид

$$[\tilde{\omega}^0_0\omega^3] + [\tilde{\omega}^1\omega^3_1] - [\tilde{\omega}^3_2\omega^2] = 0, \tag{4}$$

$$[\tilde{\omega}^0_1\omega^3] - [\tilde{\omega}^3_2\omega^2_1] + [\tilde{\omega}^1\omega^0_3] = 0, \tag{5}$$

$$[\tilde{\omega}^0_0\omega^0_3] + [\tilde{\omega}^3_2\omega^0_2] - [\tilde{\omega}^0_1\omega^3_1] = 0, \tag{6}$$

$$[\tilde{\omega}^0_0\omega^2] + [\tilde{\omega}^1\omega^2_1] + [\tilde{\omega}^3_2\omega^3] = 0, \tag{7}$$

$$[\tilde{\omega}^0_1\omega^2] + [\tilde{\omega}^3_2\omega^2_1] + [\tilde{\omega}^1\omega^0_2] = 0, \tag{8}$$

$$-[\tilde{\omega}^0_0\omega^0_2] + [\tilde{\omega}^0_1\omega^2_1] + [\tilde{\omega}^3_2\omega^0_3] = 0, \tag{9}$$

где формы $\tilde{\omega}^k_i = \overset{*}{\omega}{}^k_i - \omega^k_i$.

Присоединив уравнения (1), определяющие комплекс K, и разрешив по лемме Картана уравнения (4), (7) и (8), получим:

$$\begin{aligned} &\tilde{\omega}^3_2 = -A\omega^2 - B\omega^2_1 - C\omega^3_1; \quad \tilde{\omega}^0_0 = B\omega^2 + (C - A)\,\omega^2_1; \\ &\tilde{\omega}^1 = C\omega^2 + C\omega^3_1; \quad \tilde{\omega}^0_1 = G\omega^2 + Cb^0_2\omega^2_1 + (Cc^0_2 - Ca^0_2 - A)\,\omega^3_1. \end{aligned} \tag{10}$$

Уравнение (8), кроме того, даст

$$B = -Cb^0_2. \tag{11}$$

Оставшиеся уравнения (5), (6), (9) дадут еще 9 соотношений, которые, если учесть равенство (11), имеют вид:

$$G = -A - Cb^0_3; \tag{12}$$

$$C\,(c^0_3 - a^0_3) = 0; \tag{13}$$

$$A = C\,(c^0_2 - a^0_2 + b^0_3 + 1); \tag{14}$$

$$(C - A)\,a^0_3 + Cb^0_2 b^0_3 + Ab^0_2 + Cb^0_2 a^0_2 = 0; \tag{15}$$

$$(C - A)\,c^0_3 + Cb^0_2 c^0_2 = 0; \tag{16}$$

$$G = Ca^0_2 - Ac^0_2 - Cb^0_2 c^0_3. \tag{17}$$

$$G = (A - C)\,a_2^0 + Ab_3^0 - C\,(b_2^0)^2 + Cb_2^0 a_3^0; \tag{18}$$

$$Cb_2^0 c_2^0 - Ac_3^0 + Ca_3^0 = 0; \tag{19}$$

$$A\,(c_2^0 + 1) = C\,(2c_2^0 - a_2^0 - b_2^0 c_3^0 - b_3^0). \tag{20}$$

Из (13) имеем

$$a_3^0 = c_3^0.$$

(Допущение $C = 0$ приводит к конформно-конгруентным парам комплексов.)

Если ограничиться действительными функциями a_i^k; b_i^k; c_i^k, то уравнения (12), (14) и (20) будут непротиворечивы, если $b_2^0 = 0$; $b_3^0 = -{}^1/_2$; $c_2^0 = a_2^0 + {}^1/_2$, и при этом они дадут $A = C$; $G = -{}^1/_2$, а (11) даст $B = 0$.

Итак, комплексы, допускающие изгибание, определяются системой уравнений:

$$\omega^3 = \omega_1^2; \tag{21}$$

$$\omega_3^0 = a_3^0 \omega - {}^1/_2 \omega_1^2; \tag{22}$$

$$\omega_2^0 = (a_2^0 + {}^1/_2)\,\omega - {}^1/_2 \omega^2, \tag{23}$$

а их изгибания — системой

$$\tilde{\omega}_2^3 = C\omega; \tag{24}$$

$$\tilde{\omega}_0^0 = 0; \tag{25}$$

$$\tilde{\omega}^1 = C\omega; \tag{26}$$

$$\tilde{\omega}_1^0 = -{}^1/_2\, C\omega, \tag{27}$$

где $\omega = \omega^2 + \omega_1^3$.

Дифференцируя последовательно уравнения (24), (25), (26), (27), (21), (22), (23) внешним образом, получим:

$$\left[\omega_0^0 \omega^2\right] + \left[\omega_1^0 + {}^1/_2 \omega^1, \omega_1^2\right] + \left[d \ln C + a_3^0 \omega^1, \omega\right] = 0, \tag{24'}$$

$$\left[\omega_1^0 + {}^1/_2 \omega^1, \omega\right] = 0. \tag{25'}$$

Внешние дифференциалы (26) и (27) совпадут и дадут:

$$\left[\omega_0^0 \omega\right] = 0; \tag{26'}$$

$$\left[\omega_1^0 + {}^1/_2 \omega^1, \omega^2\right] - \left[\omega_0^0 \omega_1^2\right] + \left[\omega_2^3 + (a_2^0 - {}^1/_2)\,\omega^1, \omega\right] = 0; \tag{21'}$$

$$\left[a_3^0 \omega_0^0 + {}^1/_2\,(\omega_1^0 + {}^1/_2 \omega^1), \omega^2\right] + \left[-{}^1/_2 \omega_0^0 + a_3^0 (\omega_1^0 + {}^1/_2 \omega^1), \omega_1^2\right] + \left[\Delta a_3^0, \omega\right] = 0; \tag{22'}$$

$$\left[(a_2^0 - {}^1/_2)\,\omega_0^0, \omega^2\right] + \left[(a_2^0 - {}^1/_2)\,(\omega_1^0 + {}^1/_2 \omega^1), \omega_1^2\right] + \left[\Delta a_2^0 \omega\right] = 0. \tag{23'}$$

Система (21′) — (26′) содержит 6 независимых квадратичных уравнений. Неизвестных форм также шесть: ω_0^0, $\omega_1^0 + {}^1/_2 \omega^1$, $d \ln C + a_3^0 \omega^1$, $\omega_2^3 + (a_2^0 - {}^1/_2)\,\omega^1$, Δa_3^0 и Δa_2^0. Следовательно, число Картана $Q = 6$ (формы Δa_2^0 и Δa_3^0 содержат дифференциалы неизвестных функций a_2^0 и a_3^0).

Разрешая уравнения (26'), (25'), (24'), (21'), (22') и (23'), получим:

$$\omega_0^0 = \alpha\omega; \quad \omega_1^0 + {}^1/_2\omega^1 = \beta\omega; \quad d \ln C + a_3^0\omega^1 = \alpha\omega^2 + \beta\omega_1^2 + \gamma\omega;$$
$$\omega_2^3 + (a_2^0 - {}^1/_2)\,\omega^1 = \beta\omega^2 - \alpha\omega_1^2 + \delta\omega;$$
$$\Delta a_3^0 = (a_3^0\alpha + {}^1/_2\beta)\,\omega^2 + (a_3^0\beta - {}^1/_2\alpha)\,\omega_1^2 + \varepsilon\omega; \tag{28}$$
$$\Delta a_2^0 = (a_2^0 - {}^1/_2)\,(\alpha\omega^2 + \beta\omega_1^2) + \varkappa\omega.$$

Число произвольных параметров $N = 6$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varkappa)$.

Так как $Q = N$, то система уравнений (21) — (27), определяющая пару конформно наложимых комплексов, в инволюции (1). Отсюда следует.

Теорема существования. *Пары комплексов окружностей, допускающие конформное наложение порядка* 1, *существуют с произволом* 6 *функций одного аргумента.*

Комплексы, допускающие конформное изгибание, определяются уравнениями:

$$\omega^3 = \omega_1^2; \quad \omega_3^0 = a_3^0\omega - {}^1/_2\omega_1^2; \quad \omega_2^0 = (a_2^0 + {}^1/_2)\,\omega - {}^1/_2\omega^2;$$
$$\left[\omega_1^0 + {}^1/_2\omega^1, \omega\right] = 0; \quad \left[\omega_0^0\right], \omega = 0. \tag{29}$$

Произвол их существования — 5 *функций одного аргумента.*

Как видно из уравнения (24'), *произвол изгибания — одна функция одного аргумента.*

Уравнения (24) — (27) *показывают, что при изгибании комплексов* (29) *сохраняется семейство конгруенций* $\omega = 0$.

Теорема. *Изгибаемые комплексы окружностей* (29) *разложимы на однопараметрическое семейство конгруенций* $\omega = 0$. *Эти конгруенции имеют две пары двойных мнимых фокусов и две пары сдвоенных мнимых «развертывающихся» поверхностей.*

У этих конгруенций многообразия фокальных сфер вырождаются в 2 однопараметрических семейства мнимых точек.

Комплекс окружностей (2), касательных к поверхности (A), конформно неизгибаем.

3. Хорошую геометрическую интерпретацию изгибаемые комплексы окружностей получают при отображении трехмерного конформного пространства в четырехмерное проективное пространство P_4, введенном Дарбу. При этом отображения сферы конформного пространства M_3 отображаются в точки P_4, все точки M_3 отображаются в точки P_4, лежащие на некоторой гиперквадрике Q_3, а окружности в M_3 — в прямые в P_4 (3).

При этом отображении *комплекс окружностей* (29) *переходит в комплекс прямых в* P_4, *разложимый на однопараметрическое семейство линейных конгруенций, директрисы которых мнимы и лежат на гиперквадрике* Q_3.

Как известно, комплекс прямых в трехмерном пространстве проективно неизгибаем (4). Так как 10-членная группа конформных преобразований в M_3 изоморфна подгруппе проективных преобразований в P_4, оставляющих инвариантной гиперквадрику Q_3, то вышеизложенное позволяет сделать заключение о проективной изгибаемости трехмерного многообразия прямых в четырехмерном пространстве.

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Поступило 27 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, 1948. [2] Р. М. Гейдельман, ДАН, **72**, № 5 (1950). [3] Б. А. Розенфельд, Матем. сборн., **22** (64), № 3 (1948). [4] P. Mentré, Les variétés de l'espace reglé étudiées dans leurs propriétés infinitésimales projectives, 1923.