Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 3

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. Г. МИРИМАНОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВНУТРИ ЗАМКНУТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ЧАСТИ КОТОРОЙ ИМЕЮТ РАЗЛИЧНУЮ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ ПРОНИЦАЕМОСТЬ

(Представлено академиком Б. А. Введенским 30 VII 1951)

Рассмотрим тонкую диэлектрическую оболочку радиуса a, комплексная диэлектрическая проницаемость которой в любой точке является функцией угловых координат.

Уравнения электромагнитного поля напишем в виде:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{4}$$

где $\mathbf{J}$ — вектор плотности полного тока.

Из уравнения (1) следует, что

$$\mathbf{J} = \left(\frac{-j\ \omega\varepsilon}{4\pi} + \sigma\right)\mathbf{E} = \eta\mathbf{E}, \tag{5}$$

где $\eta = \left(\sigma - \frac{j\omega\varepsilon}{4\pi}\right)$ — полная проводимость среды.

Принимая магнитную проницаемость везде равной единице, можем утверждать, что нормальная компонента вектора напряженности магнитного поля при переходе границы двух сред будет непрерывна, ибо по условиям задачи $\operatorname{div}\mathbf{H}$ везде равна нулю.

Из этого следует, что если толщина оболочки бесконечно мала, нормальная компонента вектора $\mathbf{H}$ будет иметь одинаковые значения в противоположных точках по обе стороны оболочки. Применим соотношение (2) к прямоугольному контуру весьма малых размеров, проведенному так, чтобы стороны прямоугольника длиной δs лежали по обе стороны переходного слоя и были параллельны поверхности оболочки, а длина отрезков, проходящих сквозь переходной слой, равна толщине ее. Очевидно, что тангенциальная компонента вектора $\mathbf{E}$ при переходе через поверхность остается непрерывной. Следовательно, в случае тонкой оболочки, компонента $\mathbf{E}_s$ вектора $\mathbf{E}$ будет иметь одинаковую величину в соответствующих точках на противоположных сторонах оболочки.

Интегрируя уравнение (5) по толщине оболочки в произвольной точке ее поверхности, получим:

$$\int_0^d \mathbf{J}\, d\xi = \int_0^d \eta \mathbf{E}\, d\xi = \mathbf{E}_s \int_0^d \eta\, d\xi. \tag{6}$$

Интегралы $\int_0^d \mathbf{J}\, d\xi$ и $\int_0^d \eta\, d\xi$ представляют собой, соответственно, полную плотность тока на единицу длины поверхности и полную проводимость на единицу длины. Обозначая эти величины $\mathbf{J}$ и $1/z$, соответственно, можем написать:

$$\mathbf{E}_s = z\mathbf{J}_s. \tag{7}$$

Применяя затем уравнение (2) к указанному выше прямоугольному контуру, будем иметь

$$z \operatorname{rot} \mathbf{J}_s + [\operatorname{grad} z \cdot \mathbf{J}_s] = -\mathbf{n} \frac{\partial H_n}{\partial t}. \tag{8}$$

Если теперь применить к тому же прямоугольному контуру уравнение (1), получим:

$$(H_s)_+ ds - (H_s)_- ds = \frac{4\pi}{c} J_s \sin \theta,$$

где знаки $+$ и $-$ показывают, что соответствующие значения компонент $\mathbf{H}$ относятся в одном случае к положительной, а в другом случае к отрицательной стороне оболочки; θ является узлом между $\delta\mathbf{s}$ и $\mathbf{J}_s$. Так как это отношение справедливо для произвольного направления, лежащего в плоскости, касательной в данной точке к рассматриваемой оболочке, мы можем написать:

$$\mathbf{J}_s = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-)]. \tag{9}$$

Подставляя значение $\mathbf{J}_s$ из (9) в уравнение (8), получим:

$$z \operatorname{div} (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) + \operatorname{grad} z \cdot (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) = -4\pi \frac{\partial H_n}{\partial t}. \tag{10}$$

Уравнение (10) устанавливает зависимость между изменением полных магнитных полей по обе стороны оболочки, материал которой имеет неоднородную проводимость, независимо от того, какого происхождения эти поля. Полное поле в данном случае, как обычно, состоит из поля внешних источников, которые индуцируют в оболочке соответствующие токи, и вторичного поля, возбуждаемого этими токами в пространстве. Обозначая потенциалы этих двух частей полного поля $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(i)}$, соответственно, можем написать: $\varphi = \varphi^{(e)} + \varphi^{(i)}$. Вектор напряженности магнитного поля связан с потенциалами $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(i)}$ соотношениями

$$(\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) = \operatorname{grad} (\varphi_+^{(i)} - \varphi_-^{(i)}) + k^2 \mathbf{i}_r \Pi_m, \tag{11}$$

$$H_n = \operatorname{grad}_n (\varphi^{(e)} - \varphi^{(i)}) + k^2 \mathbf{i}_r \Pi_m. \tag{12}$$

Подставляя (11) и (12) в (10), получим:

$$z \operatorname{div} \operatorname{grad} (\varphi_+^{(i)} - \varphi_-^{(i)}) + z \operatorname{div} \overline{\Pi}_m k^2 + \operatorname{grad} z \cdot [\operatorname{grad} (\varphi_+^{(i)} - \varphi_-^{(i)}) + k^2 \overline{\Pi}_m] =$$
$$= -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial n} (\varphi^{(e)} + \varphi^{(i)}) + k^2 \Pi_m\right]. \tag{13}$$

Если поле внешних источников задано, потенциал $\varphi^{(e)}$ является известной функцией времени и пространственных координат. Для того чтобы найти вторичное поле, возбуждаемое токами в оболочке, необходимо определить функции $\varphi^{(i)}$. Функция $\varphi^{(i)}$ легко может быть определена решением скалярного волнового уравнения при соблюдении условий излучения и граничных условий, определяемых выражением (13). Распределение токов в оболочке и возбуждаемое ими вторичное поле по найденному потенциалу без особого труда могут быть получены из уравнений (9) и (11).

Так как потенциал $\varphi^{(e)}$ удовлетворяет волновому уравнению, можем принять его равным

$$\varphi^{(e)}=\sum_{m,\,n}\left[A_n^m J_n(kr)+B_n^m h_n^{(1)}(kr)\right]P_n^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}. \tag{14}$$

Здесь A_n^m, B_n^m — комплексные числа, действительные и мнимые части которых — известные функции времени. Соответствующим выбором A_n^m и B_n^m действительная часть выражения (14) может быть сделана равной потенциалу любого заданного поля источников, причем B_n^m соответствует источникам, внешним по отношению к рассматриваемой сфере радиуса a, тогда как A_n^m соответствует внутренним источникам. В дальнейшем мы будем принимать, что поле, возбуждающее токи в оболочке, является внутренним и, следовательно, $B_n^m=0$. Аналогичным путем потенциал $\varphi^{(i)}$ может быть представлен в виде:

$$\varphi^{(i)}=\sum_{m,\,n}a_n^m J_n(kr)\,P_n^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi},\qquad r<a; \tag{15}$$

$$\varphi^{(i)}=\sum_{m,\,n}b_n^m h_n^{(1)}(kr)\,P_n^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi},\qquad r>a. \tag{16}$$

Коэффициенты a_n^m и b_n^m, входящие в эти равенства, являются комплексными функциями времени. Эти коэффициенты должны быть определены в зависимости от известных функций времени A_n^m и B_n^m. Исходя из непрерывности нормальной компоненты вектора напряженности магнитного поля при переходе через поверхность $r=a$, можно написать:

$$\sum_{m,\,n}a_n^m P_n^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}\left(\frac{\partial J_n(kr)}{\partial r}+\frac{k^2}{r^2}\int r^2 J_n(kr)\,dr\right)=$$

$$=\sum_{m,\,n}b_n^m P_n^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}\left(\frac{\partial h_n^{(1)}(kr)}{\partial r}+\frac{k^2}{r^2}\int r^2 h_n^{(1)}(kr)\,dr\right). \tag{17}$$

Равенство это справедливо на всей поверхности сферы, откуда следует, что

$$b_n^m=a_n^m\left\{\frac{\left(\dfrac{\partial J_n(kr)}{\partial r}+\dfrac{k^2}{r^2}\displaystyle\int r^2 J_n(kr)\,dr\right)}{\dfrac{\partial h_n^{(1)}(kr)}{\partial r}+\dfrac{k^2}{r^2}\displaystyle\int r^2 h_n^{(1)}(kr)\,dr}\right\}=a_n^m D, \tag{18}$$

где D при $r=a$ — постоянный коэффициент, определяемый выражением, стоящим в фигурных скобках.

Таким образом, из (14) и (15) следует:

$$\varphi_{+}^{(i)} - \varphi_{-}^{(i)} = \sum_{m,\, n} \left[D h_n^{(1)}(ka) - J_n(ka) \right] a_n^m P_n^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}, \tag{19}$$

$$\varphi^{(e)} + \varphi^{(i)} = \sum_{m,\, n} \left(A_n^m + a_n^m \right) J_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}. \tag{20}$$

Подставляя (19) и (20) в (17), написанное в сферической системе координат, получим:

$$\sum_{m,\, n} a_n^m \nabla \left[D h_n^{(1)}(ka) - J_n(ka) \right] e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta) =$$

$$= -\frac{4\pi}{c} \sum_{m,\, n} \left(\frac{\partial A_n^m}{\partial t} + \frac{\partial a_n^m}{\partial t} \right) e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta)\, \Xi\, J_n(kr), \tag{21}$$

где ∇ и Ξ — интегро-дифференциальные операторы.

Оператор ∇ зависит только от распределения проводимости по поверхности оболочки и превращается в постоянную величину в случае, если проводимость оболочки постоянна.

Уравнение (21) удовлетворяется на всей поверхности сферы; умножая его на $e^{-iM\varphi} P_N^M(\cos\theta)$ и интегрируя по поверхности сферы, получим:

$$\sum_{m,n} a_n^m \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{iM\varphi} P_N^M(\cos\theta) \nabla \left\{ \left[D h_n^{(1)}(kr) - J_n(ka) \right] e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta) \right\} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= -\frac{4\pi}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} A_N^M + \frac{\partial}{\partial t} a_N^M \right) \Xi, \tag{22}$$

$$J_N(kr) \frac{(N+M)!}{(N-M)!} \frac{4\pi}{2N+1}.$$

Коэффициенты a_n^m, стоящие в левой части выражения (22), суть постоянные, которые могут быть определены по заданному закону распределения z.

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к решению линейного дифференциального уравнения относительно t с постоянными коэффициентами, которое может быть осуществлено без особого труда хорошо известными методами.

Институт автоматики и телемеханики
Академии наук СССР

Поступило
30 VI 1951