Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 4

ФИЗИКА

Действительный член АН БССР Н. С. АКУЛОВ

ОБ ОБОБЩЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КОЛМОГОРОВА, ПЕТРОВСКОГО И ПИСКУНОВА

В 1915 г. Д. В. Алексеевым был обнаружен эффект существования предельного давления p_k ацетилена, ниже которого цепной процесс разложения не распространяется (1). При этом было установлено, что предельное давление p_k быстро уменьшается с увеличением радиуса r_0 канала (цилиндрические трубы). Этими опытами устанавливается и эффект зависимости скорости распространения от радиуса r_0, так как на пределе скорость w распространения процесса разложения равна нулю, а при $p > p_k$ $w > 0$.

До сих пор не существует теории, которая позволила бы объяснить это явление и рассчитать зависимость $w(r_0)$.

Однако для случая $r_0 \to \infty$ А. Н. Колмогоровым, И. Г. Петровским и Н. С. Пискуновым (2) была поставлена и решена следующая весьма важная задача о диффузии, соединенной с автокаталитическим возрастанием количества частиц, принимающих участие в процессе диффузии.

Пусть из инициирующей части пространства диффундируют частицы одного какого-либо типа, число которых может увеличиваться при взаимодействии со средой. Задача эта решается с помощью уравнения типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(u), \tag{1}$$

где u — концентрация частиц, D — коэффициент диффузии. Для случая $f = a\left(1 - \frac{u}{u_0}\right)^2 u$ было найдено для скорости распространения диффузионных волн (2)

$$w = 2\sqrt{aD}. \tag{2}$$

В отличие от этой решенной проблемы мы должны для объяснения опытов Алексеева решить значительно более сложную задачу, когда имеется не один, а несколько типов частиц $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_N$. Диффундируя и взаимодействуя со средой, эти частицы циклически преобразуются друг в друга.

Мы имеем тогда вместо (1) систему уравнений типа

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = D_i \Delta \varphi_i + F_i(u_1, u_2, \ldots, u_N)$$
$$i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3}$$

Легко показать, что для определения скорости процесса на больших расстояниях от инициирующего центра достаточно рассмотреть область малых u_i; обозначая тогда $\left(\frac{\partial F_i}{\partial u_j}\right)_{u_i \to 0}$ через a_{ij} и считая, что по меньшей мере некоторые из a_{ij} не равны нулю, имеем для малых u_i

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = D_i \Delta u_i + a_{oi} + \sum_j a_{ij} u_j. \quad (4)$$

Свободные члены легко устраняются соответствующей подстановкой и далее мы их будем опускать.

Решение (4) было дано нами [3] для случая, когда $D_i = D = \text{const}$. Позднее был рассмотрен случай различных D_i [4]. При этом так же, как и при решении (1), делалось ограничивающее предположение, что волны распространяются в направлении z и что среда в направлении x и y не ограничена (одномерная задача).

Теперь мы должны рассмотреть, однако, весьма сложную трехмерную задачу, ибо в опытах Алексеева мы имеем дело с наличием границ, когда распространение процесса происходит вдоль цилиндрического канала. Граничные условия определяются при этом соотношениями:

$$D_i (\operatorname{grad} u_i)_{\text{гр}} = \sum_j \sigma_{ij} (u_j)_{\text{гр}}. \quad (5)$$

В самой общей постановке эта задача не может быть разрешена. Пусть, однако, гибель (или зарождение) активных центров на границах не интенсивны, а коэффициент диффузии достаточно велик. Тогда

$$\frac{\bar{u}_i - (u_i)_{\text{гр}}}{\bar{u}_i} \ll 1. \quad (6)$$

Здесь $\bar{u}_i$ — среднее по сечению цилиндра. Покажем, что в этих условиях может быть предложен метод, дающий решение этой задачи путем сведения трехмерной задачи к одномерной. При этом получается зависимость скорости распространения от условий на границах и от диаметра цилиндрической трубы и притом для любой формы ее поперечного сечения.

Пусть $ds = dx\, dy$ — элемент плоскости, перпендикулярной образующим цилиндра, идущим вдоль z. Имеем тогда

$$\bar{u}_i = \frac{1}{S} \int_S u_i \, ds, \quad (7)$$

где S — площадь сечения цилиндра.

Рассмотрим сперва в целях изложения сущности метода случай $n = 1$ в условиях, когда на стенках имеет место гибель частиц, а взаимные превращения лишь в объеме. Тогда (5) дает

$$D_i \operatorname{grad} u_i = \sigma_i u_i. \quad (8)$$

Из (4) для одного типа частиц имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u + a u, \quad (9)$$

откуда после помножения на $ds = dx\, dy$ и интегрирования по поперечному сечению, находим *

---

* Интегрирование по объему для слоя толщиной dz сводится к интегрированию по контуру.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{D}{S} \oint\limits_L (\operatorname{grad} u)_{\text{гр}}\, dl + a\bar{u} + D \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Z^2}. \tag{10}$$

Здесь интеграл берется по периметру, ограничивающему сечение. Учитывая (8) и (6), на основании (10) имеем:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \left(\sigma \frac{L}{S} + a\right) \bar{u} + D \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}, \tag{11}$$

где L — длина периметра сечения.

Итак, для скорости распространения вместо (2) будем иметь

$$W = 2\sqrt{\left(a + \sigma \frac{L}{S}\right)}. \tag{12}$$

В случае кругового цилиндра $\frac{S}{L} = \frac{1}{2} r_0$, где r_0 — радиус цилиндра. Мы получаем, таким образом, зависимость W от r_0 (для случая малоинтенсивной гибели или инициирования частиц на стенках цилиндра).

Из (12) вытекает существование критического диаметра для распространения диффузии, связанной с размножением частиц

$$r_0 = -\frac{2\sigma}{a} \tag{13}$$

(если имеет место гибель частиц на стенках канала, то $\sigma < 0$).

Полученные результаты могут быть обобщены на случай системы уравнений (4).

Направляя ось полярной системы координат Z вдоль оси цилиндра, интегрируя по плоскости поперечного сечения и учитывая (8), будем иметь:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial Z^2} + \frac{D_i}{S} \int\limits_L (\operatorname{grad} u_i)_{\text{гр}}\, ds + \sum_j a_{ij} \bar{u}_j. \tag{14}$$

Но в силу условий (5) и (6) из (14) находим

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial z^2} + \sum_j a'_{ij} \bar{u}_j, \tag{15}$$

где

$$a'_{ii} = a_{ii} + \sigma_i \frac{L}{S}.$$

Таким образом, решение задачи о диффузии в канале частиц различных типов, соединенной с взаимными превращениями их друг в друга, может быть сведено при условиях (5) и (6) к решению одномерной задачи. Но эта задача уже решена в работах [4] и [5]. В частности, для случая $D_i = D$ имеем, применяя результаты (4)

$$W = 2\sqrt{k'_m D}, \tag{16}$$

где k_m — есть максимальный корень характеристического уравнения:

$$A'(k) = \operatorname{Det} \| a'_{ij} - \delta_{ij} k \| = 0. \tag{17}$$

Поскольку нас интересует обычно п е р е х о д от затухающего процесса, когда распространение с постоянной скоростью состояний $u_i = \text{const}$ невозможно к состояниям самоускоренного процесса, к которым относится формула (16), мы можем исходить из значений a'_{ij}, при которых все корни отрицательны. Меняя затем a'_{ij}, мы переходим к случаю, когда один корень положителен, но мал по абсолютной величине. Тогда, как легко показать,

$$k'_m = \frac{A'(0)}{\sum_i A'_i(0)}. \tag{18}$$

Критический диаметр, при котором процесс перестает распространяться, определяется согласно (16) и (18) условием

$$A'(0) = 0. \tag{19}$$

Если на поверхности ограничивающего пространства частицы гибнут, но не переходят друг в друга $[(\sigma_{ij})_{i \neq j} = 0]$, то вследствие малости $\sigma_i \frac{L}{S}$ в (19) можно взять их первые степени и тогда для критического радиуса канала найдем:

$$\left(\frac{S}{L}\right)_{\text{кр}} = \frac{A(0)}{\sum_i \sigma_i A_i(0)}. \tag{20}$$

где $A(0) = [A'(0)]_{L=0}$.

Из (14) как частный случай при $N = 1$ следует (13).

В том случае, когда израсходование продуктов приводит к остановке процесса, имеющего начальное ускорение, мы можем говорить (условно) о периоде индукции τ и периоде реакции τ_r. Соответственно этому, можно говорить о ширине B зоны реакции в цепной волне. Начало ее соответствует началу τ_r, а конец — окончанию τ_r. Обозначая τ_r / τ через θ, учитывая, что

$$\tau = \frac{1}{k_m}, \tag{21}$$

и, кроме того, принимая во внимание, что

$$W = \frac{B}{\tau_r}, \tag{22}$$

находим:

$$B = 2\theta \sqrt{k_m'^{-1} D}. \tag{23}$$

Таким образом, вследствие зависимости k'_m от r_0 ширина зоны цепного пламени B является функцией диаметра канала, именно с увеличением r_0 при $\sigma_i < 0$ величина B уменьшается.

Развитая теория позволяет, таким образом, определить важнейшие характеристики распространения цепно-диффузионных волн.

Поступило
7 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. В. Алексеев, О взрывном разложении ацетилена, М., 1915, стр. 100. [2] А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский и Н. С. Пискунов, Бюлл. Моск. гос. ун-та, 1, в. 6 (1937). [3] Н. С. Акулов, ДАН, 61, № 2 (1948). [4] Н. С. Акулов, Ю. Л. Рабинович и В. И. Скобелкин, ДАН, 78, № 6 (1951). [5] Н. С. Акулов, ДАН, 78, № 3 (1951).