Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Г. СВЕШНИКОВ

ПРИНЦИП ПРЕДЕЛЬНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОДА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 10 VII 1951)

1. Многие задачи электродинамики сводятся к решению волнового уравнения

$$\Delta u + k^2 u = - f(z, M) \qquad [M = (x, y)] \tag{1}$$

внутри бесконечного цилиндрического волновода произвольного поперечного сечения S. На боковой поверхности волновода Σ обычно задается однородное граничное условие

$$u \Big|_{\Sigma} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = 0; \tag{2}$$

$f(M, z)$ — функция локального возмущения.

Для выделения единственного решения задачи нужно подчинить искомое решение некоторым дополнительным условиям на бесконечности. Обычно это условие формулируется в виде требования отсутствия волн, приходящих из бесконечности. Легко показать, что такое требование эквивалентно некоторому аналитическому условию, по внешнему виду схожему с условием излучения Зоммерфельда. Эти условия естественно назвать парциальными условиями излучения.

Теорема 1. *Однородное волновое уравнение*

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{1'}$$

внутри волновода имеет только тривиальное решение $u \equiv 0$, удовлетворяющее краевому условию (2) *и условиям на бесконечности*

$$\frac{\partial Z_n}{\partial |z|} + \gamma_n Z_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots, N), \tag{3}$$

где Z_n — коэффициенты разложения функции

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z)\, \psi_n(M) \quad ({}^1)$$

по собственным функциям уравнения колебаний мембраны

$$\Delta \psi_n + \lambda_n \psi_n = 0; \qquad \psi_n \Big|_C = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial n}\Big|_C = 0,$$

соответствующей поперечному сечению волновода S, *а* $\gamma_n = \sqrt{\lambda - k^2}$. *Число условий* (3) *определяется из соотношения* $\lambda_n \leqslant k^2$.

Доказательство теоремы основано на применении формулы Грина к функции u и функции источника

$$\Pi(M, M_0; z, z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\,\psi_n(M_0)}{2\sqrt{\lambda_n - k^2}}\, e^{-\sqrt{\lambda_n - k^2}\,|z-z_0|}. \tag{4}$$

Функция $\Pi(M, M_0; z, z_0)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению (1′), краевому условию (2), условию излучения (3) и имеет особенность типа $\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}$ при совпадении аргументов [2].

Из теоремы единственности следует, что искомое решение уравнения (1) может быть представлено в виде

$$u(M, z) = \iiint\limits_V \Pi(M, M_0; z, z_0)\, f(M_0, z_0)\, d\tau_{M_0 z_0}, \tag{5}$$

где интегрирование производится по области, в которой функция $f(M_0, z_0)$ отлична от нуля.

2. Условия излучения (3) имеют весьма специальный вид, поэтому естественно для выделения единственного решения уравнения (1) воспользоваться единообразным принципом излучения. Таким принципом является принцип предельного поглощения [3], который заключается в следующем.

Решение волнового уравнения (1), удовлетворяющее требованию отсутствия волн, приходящих из бесконечности, ищется как предел решения волнового уравнения с комплексным $k_1^2 = k^2 + i\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ при $\varepsilon \to 0$. В случае задач электродинамики это соответствует стремлению к нулю проводимости внешней среды.

Принцип предельного поглощения является весьма общим принципом, не зависящим от вида области решения волнового уравнения*.

Для возможности применения принципа предельного поглощения к нашей задаче надо доказать, что уравнение

$$\Delta u_1 + k_1^2 u_1 = -f(M, z) \tag{1″}$$

внутри волновода имеет единственное решение, ограниченное на бесконечности и удовлетворяющее краевому условию (2).

Теорема 2. *Решение однородного уравнения*

$$\Delta u_1 + k_1^2 u_1 = 0, \quad k_1^2 = k^2 + i\varepsilon \quad (\varepsilon > 0), \tag{1‴}$$

удовлетворяющее краевому условию

$$u_1\Big|_\Sigma = 0 \quad \textit{или} \quad \frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_\Sigma = 0 \tag{2′}$$

и ограниченное на бесконечности, тождественно равно нулю внутри волновода.

---

* Можно было бы воспользоваться «принципом погашаемости» [4], который для рассматриваемой области полностью эквивалентен принципу предельного поглощения.

Рассмотрим функцию

$$\Pi_1(M, M_0; z, z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\psi_n(M_0)}{2\sqrt{\lambda_n - k_1^2}} \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n - k_1^2}\,(Z - |z - z_0|)}{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_n - k_1^2}\,Z}. \tag{6}$$

Функция $\Pi_1(M, M_0; z, z_0)$ удовлетворяет волновому уравнению (1'''), краевому условию (2') и при совпадении аргументов имеет особенность типа $e^{ik_1 r}/r$. Это доказывается так же, как и для функции $\Pi(M, M_0; z, z_0)$ [2]. Кроме того, при $|z - z_0| = Z$ функция $\Pi_1(M, M_0; z, z_0)$ равна нулю и ее производная по z экспоненциально стремится к нулю при $Z \to \infty$. Поэтому, применив формулу Грина к функциям u_1 и $\Pi_1(M, M_0; z, z_0)$ внутри области, ограниченной плоскостями $z_1 = z_0 + Z$ и $z_2 = z_0 - Z$ и устремив Z к бесконечности, мы и докажем нашу теорему.

Из доказанной теоремы единственности следует, что искомое решение уравнения (1'') имеет вид

$$u_1(M, z) = \iiint\limits_V \Pi(M, M_0; z, z_0) f(M_0, z_0)\, d\tau_{M_0, z_0} \tag{7}$$

где

$$\Pi(M, M_0; z, z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\psi(M_0)}{2\sqrt{\lambda_n - k_1^2}} e^{-\sqrt{\lambda_n - k_1^2}\,|z - z_0|}. \tag{8}$$

Полученные результаты позволяют доказать принцип предельного поглощения для волновода.

Теорема 3. *Существует предел при $\varepsilon \to 0$ ограниченного на бесконечности решения уравнения* (1''). *Этот предел является решением уравнения* (1), *удовлетворяющим требованию отсутствия волн, приходящих из бесконечности.*

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в формуле (7), мы получим формулу (5), что и доказывает нашу теорему. Возможность предельного перехода следует из равномерной сходимости рядов, представляющих функции $\Pi(M, M_0; z, z_0)$ и $\Pi(M, M_0; z, z_0)$.

В заключение я считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность проф. А. Н. Тихонову, под руководством которого сделана эта работа.

Поступило
25 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Самарский и А. Н. Тихонов, ЖТФ, **18**, 7, 959 (1948). [2] А. А. Самарский и А. Н. Тихонов, ЖТФ, **17**, 1283 (1947). [3] А. Г. Свешников, ДАН, **73**, № 5, 917 (1950). [4] Г. Д. Малюжинец, ДАН, **78**, № 3, 439 (1951).