Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР И. Н. ВЕКУА

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ ЕДИНСТВЕННОСТИ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ТЕОРИИ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ

1. В ряде работ В. Д. Купрадзе (см., например, ([1])) доказываются теоремы единственности решения граничных задач установившихся процессов электромагнитных и упругих колебаний. В этих работах автор использует некую положительную форму, названную им квази-энергией. Но использование этой формы лишь усложняет процесс доказательства. В работе ([2]) я указал другой, более простой путь доказательства теорем единственности в случае граничных задач электромагнитных волн.

В настоящей работе показывается, что этот способ применим также к случаю упругих колебаний. Мы ограничимся рассмотрением случая трехмерного пространства. Случай двумерного пространства рассматривается аналогично.

2. Пусть S — совокупность конечного числа простых замкнутых гладких поверхностей без общих точек. Пусть D — бесконечная область, граница которой есть S.

Вектор U, имеющий в D непрерывные производные второго порядка и удовлетворяющий уравнению

$$\Delta^* U + k_2^2 U \equiv \mu \Delta U + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad\,div}\, U = k_2^2 U = 0, \tag{1}$$

можно представить в виде суммы

$$U = U^{(1)} + U^{(2)}, \tag{2}$$

где векторы $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ удовлетворяют условиям:

$$\Delta U^{(1)} + k_1^2 U^{(1)} = 0, \quad \mathrm{rot}\, U^{(1)} = 0; \tag{3}$$

$$\Delta U^{(2)} + k_2^2 U^{(2)} = 0, \quad \mathrm{div}\, U^{(2)} = 0 \tag{4}$$

$$\left(k_1^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\lambda + 2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\mu}\right).$$

Нетрудно доказать, что представление (2) однозначно, а именно, векторы $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ определяются по формулам:

$$U^{(1)} = \frac{\Delta U + k_2^2 U}{k_2^2 - k_1^2}, \quad U^{(2)} = \frac{\Delta U + k_1^2 U}{k_1^2 - k_2^2}. \tag{5}$$

Если подчиним векторы $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ на бесконечности условиям

$$\frac{\partial U^{(j)}}{\partial R} - ik_j U^{(j)} = o(R^{-1}) \quad (j = 1, 2), \tag{6}$$

где R — радиус-вектор достаточно удаленной точки (x_1, x_2, x_3), то вне некоторой сферы S_0, содержащей внутри себя S, можно эти векторы представить интегралами ([2], стр. 115)

$$U^{(j)}(P) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_0} \left[U^{(j)}(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \frac{e^{ik_j r}}{r} - \frac{e^{ik_j r}}{r} \frac{\partial U^{(j)}}{\partial n_Q} \right] dS_Q \quad (j = 1, 2), \tag{7}$$

где n_Q — внутренняя нормаль к S_0 в точке Q; $r = \overline{PQ}$, $P \in D$, $Q \in S_0$.

Из этих формул сразу получаем следующие асимптотические формулы [2]:

$$U^{(j)} = O(R^{-1}) \quad (j = 1, 2), \tag{8}$$

$$\frac{\partial U^{(j)}}{\partial x_k} - ik_j \nu_k U^{(j)} = O(R^{-2}) \quad (j = 1, 2), \tag{9}$$

где $\nu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — орт радиуса-вектора точки (x_1, x_2, x_3).

Условия (8), которые вытекают из условий (6), В. Д. Купрадзе в [1] рассматривает как самостоятельные.

В силу (8), второй формулы (3) и второй формулы (4) легко получим:

$$\operatorname{div} U^{(1)} - ik_1 U_\nu^{(1)} = O(R^{-2}), \tag{10}$$

$$\operatorname{rot} U^{(2)} - ik_2 \nu \times U^{(2)} = O(R^{-2}), \tag{11}$$

$$U_\nu^{(2)} = O(R^{-2}), \quad \nu \times U^{(1)} = O(R^{-2}), \tag{12}$$

где U_ν обозначает проекцию вектора U на направление орта ν. Из (12) получаем также

$$U^{(1)} \overline{U^{(2)}} = O(R^{-3}), \tag{13}$$

где $\bar{U}$ обозначает вектор, компоненты которого комплексно сопряжены с компонентами U.

Как нетрудно видеть, вектор напряжения, действующего на площадку с нормалью ν и соответствующего вектору смещения U, имеет вид

$$T(U) = 2\mu \frac{\partial U}{\partial \nu} + \lambda \nu \operatorname{div} U + \mu (\nu \times \operatorname{rot} U). \tag{14}$$

В силу (2), (3) и (4) будем иметь

$$T(U) = 2\mu \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \nu} + 2\mu \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \nu} + \lambda \nu \operatorname{div} U^{(1)} + \mu (\nu \times \operatorname{rot} U^{(2)}). \tag{15}$$

На основании (9) — (12) вдоль сферы Σ_R достаточно большого радиуса R будем иметь

$$T(U) = 2i\mu k_1 U^{(1)} + i\mu k_2 U^{(2)} + i\lambda k_1 \nu U_\nu^{(1)} + O(R^{-2}).$$

Отсюда, в силу (2) и (13), легко найдем, что вдоль Σ_R:

$$\overline{U}\,T(U)-U\,T(\overline{U})=$$
$$=4i\mu k_1 U^{(1)}\overline{U^{(1)}}+2i\mu k_2 U^{(2)}\overline{U^{(2)}}+2i\lambda k_1 U^{(1)}_{\nu}\overline{U^{(1)}_{\nu}}+O\left(R^{-3}\right). \tag{16}$$

Пусть в каждой точке границы S области D вектор U удовлетворяет одному из условий

$$U=0,\qquad T(U)=0. \tag{17}$$

Мы должны доказать, что $U=0$ всюду в D. В этом и состоит теорема единственности в задачах упругих колебаний.

Пользуясь формулой Грина (([1]), стр. 130), в силу (15), для любого достаточно большого R будем иметь

$$\iint\limits_{\Sigma_R}[\overline{U}\,T(U)-U\,T(\overline{U})]\,d\Sigma=0. \tag{18}$$

Отсюда, в силу (14), сразу получим

$$\lim_{R\to\infty}\iint\limits_{\Sigma_R}\left|\,U^{(j)}_k\right|^2 d\Sigma=0\quad(j=1,2;\ k=1,2,3), \tag{19}$$

где $U^{(j)}_k$ — компоненты вектора $U^{(j)}$ относительно декартовой системы координат, которые удовлетворяют в D уравнению вида $\Delta U+\lambda^2 U=0$ (λ — действительная постоянная). В нашей работе ([2]) (стр. 135) доказана следующая лемма.

Лемма. *Если U — решение уравнения $\Delta U+\lambda^2 U=0$, имеющее непрерывные производные второго порядка в D и удовлетворяющее на бесконечности условию*

$$\iint\limits_{\Sigma_R}|\,U|^2\,d\Sigma=o(1),$$

то $U=0$ всюду в D.

На основании этой леммы из (19) будем иметь, что $U^{(j)}=0$ $(j=1,2)$ всюду в D, а это и требовалось доказать.

Заметим еще, что на основании (9) имеем также следующие оценки

$$U^{(2)}_{\nu}=O\left(R^{-2}\right),\quad U^{(1)}_{\theta}=O\left(R^{-3/2}\right),\quad U^{(1)}_{\varphi}=O\left(R^{-3/2}\right), \tag{20}$$

где U_ν, U_θ, U_φ — компоненты вектора U на оси сферических координат.

Из оценок (20) видно, что в удаленных в достаточной степени частях пространства колебательный процесс, выраженный вектором $U^{(1)}$, имеет преимущественно продольный характер, так как поперечные компоненты $U^{(1)}_\theta$, $U^{(1)}_\varphi$ амплитуды колебания убывают быстрее, чем компонент в радиальном направлении, ибо $U^{(1)}_\nu=O\left(R^{-1}\right)$. Что же касается колебательного процесса, соответствующего вектору $U^{(2)}$, то здесь, наоборот, в далеких частях пространства колебание носит преимущественно поперечный характер.

Математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук Груз.ССР

Поступило
14 VII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Д. Купрадзе, Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, М., 1950. [2] И. Н. Векуа, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, **12** (1943).