Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. А. СЛЕЗКИН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 1 VIII 1951)

Явление деформации материала за пределом его текучести в ряде случаев уже нельзя рассматривать только лишь как механическое явление взаимодействия поля напряжений и поля деформаций. Процесс деформирования в этих случаях сопровождается и некоторыми физическими явлениями и химическими превращениями, связанными как с переходами энергии из одной формы в другую, так и с изменениями внутренней структуры строения материала. Для изучения процесса деформирования материала в таких именно случаях в механике деформированных сред нельзя ограничиться только лишь изменениями формы соотношений связи между состоянием напряжений и состоянием деформаций в точке в сторону большего отражения в них особенностей реального явления деформаций. Возникает необходимость также и в том, чтобы видоизменять сами дифференциальные уравнения, связывающие изменения напряжений в пространстве с изменениями скоростей смещения во времени, также в сторону большего отражения в них особенностей процесса деформирования и связанных с ним процессов переноса масс, энергий и количеств движения. Первым шагом в этом направлении можно считать переход от хорошо известных уравнений движения или равновесия деформируемой среды в напряжениях к установленным корифеями науки: Эйлером, Максвеллом и Умовым дифференциальным уравнениям переноса масс, количеств движения и энергии.

На основании результатов многочисленных экспериментов можно отметить следующие три особенности реального процесса деформирования.

1. Макроскопический процесс деформирования материального объекта конечных размеров оказывает свое направленное воздействие как на возникновение, так и на течение внутренних процессов в малом объеме.

2. Некоторые из микроскопических процессов в свою очередь сказываются не только на конечном результате макроскопического процесса деформирования, но и на отдельных особенностях его течения. Такие внутренние процессы естественно называть активными процессами

3. По мере развития макроскопического процесса деформирования изменяются и активные внутренние процессы (скольжение, дислокация, диффузия, рекристаллизация и пр.) не только по своему характеру, но и по степени охвата ими частиц в малом объеме.

Эти три особенности реального процесса деформирования мы можем отразить в дифференциальных уравнениях переноса, если, например, откажемся от ранее практиковавшегося метода сплошного осреднения в малом объеме ряда величин, входящих в эти уравнения, и заменим его через дифференцированное осреднение. Метод дифференцированного осреднения следует применить именно для того, чтобы из всей совокупности частиц в малом объеме выделить хотя бы одну такую группу, которая и в большей мере воспринимает направленное воздействие макроскопического процесса деформирования в каком-либо своем качестве (ориентировка плоскостей скольжения, степень подвижности, степень концентрации и пр.) и в большей мере оказывает влияние на особенности протекания самого макроскопического процесса.

Рассмотрим процесс деформации некоторого материального объекта. Внутри него возьмем точку O с координатами x_1, x_2 и x_3 в качестве вершины параллелепипеда с малыми ребрами Δx_1, Δx_2 и Δx_3. Отношения частей общего объема параллелепипеда, занятых в момент t группой активированных частиц и всеми остальными частицами, ко всему объему обозначим, соответственно, через m_a и m. Отношения масс этих частиц к занимаемым ими объемам обозначим через ρ_a и ρ. Векторы осредненных по соответственным массам скоростей будем обозначать через $\overline{V}_a$ и $\overline{V}$. Аналогично вводим обозначения и других величин. Проведем через точку O элементарную площадку с нормалью n. Отношения частей площадок, занятых активированными и остальными частицами, ко всей площадке обозначим, соответственно, через s_{an} и s_n.

Для вывода уравнений процесса деформирования воспользуемся уравнениями переноса в том виде, как это было сделано в нашей статье ([1]). В результате мы получим следующие дифференциальные уравнения общего процесса деформирования:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m_a\rho_a + m\rho\right) + \sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(s_{ia}\rho_a V_{ia} + s_i\rho V_i\right) = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m_a\rho_a\overline{V}_a + m\rho\overline{V}\right) =$$
$$= \overline{F}\left(m_a\rho_a + m\rho\right) + \sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(s_{ia}\overline{p}_{ia} + \overline{p}_i s_i - s_{ia}\rho_a V_{ia}\overline{V}_a - \rho s_i V_i\overline{V}\right); \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[m_a\rho_a\left(\frac{V_a^2}{2} + \varepsilon_a\right) + m\rho\left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon\right)\right] =$$
$$= \overline{F}\cdot\left(m_a\rho_a\overline{V}_a + m\rho\overline{V}\right) + \sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[s_{ia}\overline{p}_{ia}\cdot\overline{V}_a + s_i\overline{p}_i\cdot\overline{V} - s_{ia}\rho_a\cdot V_{ia}\left(\frac{V_a^2}{2} + \varepsilon_a\right) -\right.$$
$$\left. - s_i\rho V_i\left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon\right) + \frac{1}{A}\left(s_{ia}\varkappa_a\frac{\partial T_a}{\partial x_i} + s_i\varkappa\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\right]. \tag{3}$$

Чтобы систему дифференциальных уравнений (1), (2) и (3) сделать замкнутой, необходимо ее дополнить целым рядом соотношений, связывающих те же переменные величины. Эти соотношения должны учитывать конкретные особенности не только начальных условий нагружения, начальной структуры материала, начальной внешней формы деформируемого объекта, начального распределения температуры, начальных условий подвода или отвода тепла и других исходных условий, но и изменения условий процесса деформирования по отдельным его стадиям. Следовательно, нельзя предполагать, что эти дополнительные соотношения будут иметь одну и ту же неизменную форму, независимо от начальных условий деформирования и от характера стадий процесса деформирования.

Будем предполагать, что нагружение какой-то детали происходит весьма медленно и величины самих нагрузок таковы, что макроскопического разрушения детали в течение длительного промежутка времени произойти не может. При этих предположениях мы можем пренебречь кинетической энергией частиц по сравнению с внутренней энергией и пренебречь переносимыми векторами количеств движения по сравнению с соответственными векторами напряжений, т. е. положить

$$\frac{V_a^2}{2\varepsilon_a} \sim 0; \quad \frac{V^2}{2\varepsilon} \sim 0; \quad \frac{|\rho V_i \overline{V}_a|}{|\overline{p}_{ia}|} \sim 0; \quad \frac{|\rho V_i \overline{V}|}{|\overline{p}_i|} \sim 0. \tag{4}$$

Поскольку структура строения металла отражена в уравнениях (1), (2) и (3) отдельными величинами, постольку мы можем считать плотности ρ_a и ρ постоянными величинами, т. е. положить

$$\rho_a = \text{const}; \qquad \rho = \text{const}. \tag{5}$$

Для упругой стадии деформирования детали можно предполагать

$$\frac{m_a}{m} \sim 0; \qquad \frac{s_{ia}}{s_i} \sim 0. \tag{6}$$

Если учесть предположения (4), (5) и (6), то дифференциальные уравнения (1), (2) и (3) после некоторых преобразований принимают вид

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial (s_i V_i)}{\partial x_i} = 0;$$

$$\rho m \frac{\partial \overline{V}}{\partial t} - \rho \overline{V} \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i} (s_i V_i) = m\rho \overline{F} + \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i} (s_i \overline{p}_i); \tag{7}$$

$$m\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \sum_{i=1}^{i=3} s_i V_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \rho \overline{V} \cdot \frac{\partial (m\overline{V})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=3} s_i \overline{p}_i \cdot \frac{\partial \overline{V}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\varkappa s_i}{A} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right).$$

В некоторых случаях можно предположить, что процесс упругого деформирования протекает не только с малыми скоростями смещений, но и с малыми скоростями деформаций, т. е. положить

$$\frac{\left| \sum_{i=1}^{i=3} \overline{V} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (s_i V_i) \right|}{\left| m \frac{\partial \overline{V}}{\partial t} \right|} \sim 0; \qquad \frac{\overline{V} \cdot \frac{\partial (m\overline{V})}{\partial t}}{m \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}} \sim 0; \qquad \frac{\left| \sum_{i=1}^{i=3} s_i V_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right|}{\left| m \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right|} \sim 0. \tag{8}$$

Вводим вектор смещения $\overline{U}$, полагая

$$\overline{V} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial t}. \tag{9}$$

При использовании предположений (8) и (9) второе — основное уравнение (7) представится в виде

$$m\rho \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial t^2} = m\rho \overline{F} + \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i} (s_i \overline{p}_i). \tag{10}$$

Дифференциальное уравнение (10) будет формально совпадать с известным дифференциальным уравнением теории упругости в напряжениях, если вернуться к обычному пониманию плотности и истинный вектор напряжения заменить приведенным вектором напряжения, т. е. положить

$$m\rho = \rho', \qquad s_i \overline{p}_i = \overline{P}_i. \tag{11}$$

Предполагая, что

$$\frac{\partial s_i}{\partial t} \sim 0; \qquad \frac{\partial}{\partial t}(s_i \overline{p}_i) \sim 0; \qquad \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i}(s_i U_i) \sim 0, \tag{12}$$

первое и третье уравнения (7) можно представить в виде

$$\begin{gathered} m + \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i}(s_i U_i) = C; \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(C\rho\varepsilon - \sum_{i=1}^{i=3} \overline{P}_i \cdot \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\varkappa s_i}{A} \frac{\partial T}{\partial x_i}\right). \end{gathered} \tag{13}$$

Если пренебрегать изменением температуры, то из последнего уравнения (13) мы получим с точностью до аддитивного постоянного хорошо известное выражение для внутренней упругой энергии единицы объема.

Переход за предел текучести материала прежде всего будет означать, что области, занятые группами активированных частиц, для которых, например, имеет место скольжение или дислокация, не могут считаться пренебрежимо малыми во всех уравнениях (1), (2) и (3). Следовательно, предположение (6) не может быть использовано во всех уравнениях. От него следует отказаться в первую очередь в тех уравнениях, в которых при s_{ia} в качестве множителя входит напряжение, одна из составляющих которого превосходит соответственный предел текучести.

Принимая это предположение, а также предположения (4), (5), (8), (9), (12) и полагая в уравнении (3)

$$V_a = V, \tag{14}$$

из уравнений (1), (2) и (3) получим

$$\begin{gathered} m + \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i}(s_i U_i) = C; \\ m\rho \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial t^2} = m\rho \overline{F} + \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i}(s_{ia}\overline{p}_{ia} + s_i \overline{p}_i); \\ \frac{\partial}{\partial t}\left[C\rho\varepsilon - \sum_{i=1}^{i=3}(s_{ia}\overline{p}_{ia} + s_i \overline{p}_i) \cdot \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_i}\right] = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\varkappa s_i}{A} \frac{\partial T}{\partial x_i}\right). \end{gathered} \tag{15}$$

Второе уравнение (15) после перехода к обычному представлению плотности и приведенным векторам напряжений будет совпадать с уравнением той теории упруго-пластических деформаций, в которой вводятся в рассмотрение два различных тензора напряжений в данной точке.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[2] Н. А. Слезкин, ДАН, 77, № 2 (1951).