Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

К. В. РУППЕНЕЙТ

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 11 VIII 1951)

1. Основная система уравнений при осевой симметрии образуется уравнениями равновесия

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}=\frac{\sigma_\theta-\sigma_r}{r}, \quad \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}=-\frac{\tau_{rz}}{r}, \tag{1}$$

условиями совместности деформаций

$$\frac{\partial^2\varepsilon_r}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial r^2}=\frac{\partial^2\gamma_{rz}}{\partial r\,\partial z}, \quad \frac{\partial^2\varepsilon_\theta}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_z}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\gamma_{rz}}{\partial z} \tag{2}$$

и условием пластичности, которое может быть взято в форме постоянства интенсивности напряжений сдвига

$$(\sigma_r-\sigma_z)^2+(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+(\sigma_z-\sigma_\theta)^2+6\tau_{rz}^2=6k^2. \tag{3}$$

Симондсом [1] было установлено, что эта система в общем случае принадлежит к эллиптическому типу, переходящему в гиперболический, если задача может быть сведена к плоской. Однако полученные Симондсом выражения для характеристик неудобны для дальнейших исследований. Значительно более удобные для дальнейших исследований выражения характеристик получаются при использовании соотношений для компонент напряжения, предложенных В. В. Соколовским [2]:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r-\sigma\\ \sigma_z-\sigma\end{matrix}\right\}=+\frac{k}{\sqrt{3}}\left[\sin\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\pm\sqrt{3}\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\cos 2\varphi\right],$$

$$\sigma_\theta-\sigma=-\frac{2k}{\sqrt{3}}\sin\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right), \quad \tau_{rz}=+k\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\sin 2\varphi;$$

отсюда компоненты деформации даются формулами:

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_z\end{matrix}\right\}=+\frac{k\lambda}{\sqrt{3}}\left[\sin\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\pm\sqrt{3}\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\cos 2\varphi\right],$$

$$\varepsilon_\theta=-\frac{2k\lambda}{\sqrt{3}}\sin\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right), \quad \gamma_{rz}=+2k\lambda\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\sin 2\varphi,$$

где $3\sigma=\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z$, $\operatorname{tg}\omega=\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{\sqrt{3}\,(\sigma-\sigma_3)}$, φ — угол между σ_1 и осью r.

С помощью выписанных выражений для компонент напряжения и деформации основная система уравнений может быть сведена к системе трех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно ω, φ, λ. Используя очевидные соотношения

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial r\,\partial z}=\frac{d\omega_z}{dr}-p\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}=\frac{d\omega_r}{dr}-p\frac{d\omega_z}{dr}+p^2\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}, \tag{4}$$

где $p = dz / dr$, и аналогичные зависимости для остальных переменных, полученная система может быть представлена в форме:

$$A_1\omega_{zz} + B_1\varphi_{zz} = F_1, \quad A_2\omega_{zz} + B_2\varphi_{zz} + C_2\lambda_{zz} = F_2,$$
$$A_3\omega_{zz} + B_3\varphi_{zz} + C_3\lambda_{zz} = F_3. \tag{5}$$

В этой системе уравнений значения коэффициентов при вторых производных даются для первого уравнения формулами

$$A_1 = + (p^2 \sin 2\varphi + 2p \cos 2\varphi - \sin 2\varphi) \sin \left(\omega - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$B_1 = -2 (p^2 \cos 2\varphi - 2p \sin 2\varphi - \cos 2\varphi) \cos \left(\omega - \frac{\pi}{6}\right);$$

для второго уравнения

$$A_2 = + \lambda (p^2 \cos 2\varphi - 2p \sin 2\varphi - \cos 2\varphi) \sin \left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) +$$
$$+ \frac{\lambda}{\sqrt{3}} (1 + p^2) \cos \left(\omega - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$B_2 = + \lambda (p^2 \sin 2\varphi + 2p \cos 2\varphi - \sin 2\varphi) \cos \left(\omega - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$C_2 = - (p^2 \cos 2\varphi - 2p \sin 2\varphi - \cos 2\varphi) \cos \left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} (1 + p^2) \sin \left(\omega - \frac{\pi}{6}\right);$$

для третьего уравнения

$$A_3 = + \frac{2\lambda}{\sqrt{3}} \cos \left(\omega - \frac{\pi}{6}\right), \quad B_3 = 0, \quad C_3 = + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\omega - \frac{\pi}{6}\right).$$

Приравнивая нулю характеристический определитель системы (5), получаем условие

$$A_1B_2C_3 + B_1C_2A_3 - B_1A_2C_3 = 0. \tag{6}$$

Внося в условие (6) значения коэффициентов, получаем уравнение четвертой степени относительно p

$$(p^2 \cos 2\varphi - 2p \sin 2\varphi - \cos 2\varphi)^2 =$$
$$= -\sin^2 \left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) (p^2 \sin 2\varphi + 2p \cos 2\varphi - \sin 2\varphi)^2. \tag{7}$$

Корни этого уравнения будут:

$$p = \frac{\sin 2\varphi \pm \left[\cos \left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin \left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) \cos 2\varphi\right]}{\cos 2\varphi \mp i \sin \left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) \sin 2\varphi}. \tag{8}$$

Следовательно, в общем случае система уравнений при условии пластичности (3) принадлежит к эллиптическому типу. Характеристики могут иметь действительные значения только при $\omega = \pi / 6$. Подстановка полученного значения ω в выражения компонент напряжения и деформации приводит к следующим условиям: $\sigma_0 = \sigma$ и $\varepsilon_0 = 0$.

Таким образом, уравнения переходят в гиперболический тип, если осесимметричная задача переходит в задачу с плоской деформацией по координате θ.

2. Перейдем к рассмотрению специального случая, когда переме-

щение w вдоль оси z известная функция. Условия совместности деформаций (2) переходят в уравнения первого порядка

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial r} = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial z} = \frac{1}{r}\left(\gamma_{rz} - \frac{\partial w}{\partial z}\right). \tag{9}$$

Компоненты деформации могут быть представлены в форме:

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{matrix}\right\} = \pm\frac{1}{2}k\lambda\left[\sqrt{3}\sin\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\cos 2\varphi\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\gamma_{rz} = +2k\lambda\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\sin 2\varphi. \tag{10}$$

Основная система уравнений сводится к четырем дифференциальным уравнениям первого порядка относительно σ, ω, φ и λ, которые приводятся к виду

$$\begin{aligned} A_1\sigma_z + B_1\omega_z + C_1\varphi_z &= F_1, \qquad & B_3\omega_z + C_3\varphi_z + D_3\lambda_z &= F_3,\\ A_2\sigma_z + B_2\omega_z + C_2\varphi_z &= F_2, \qquad & B_4\omega_z + C_4\varphi_z + D_4\lambda_z &= F_4.\end{aligned} \tag{11}$$

Коэффициенты первого уравнения системы имеют значения:

$$A_1 = -p,$$
$$B_1 = -\frac{p}{\sqrt{3}}\left[\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\sin\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\cos 2\varphi\right]-\sin\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\sin 2\varphi,$$
$$C_1 = +2(p\sin 2\varphi+\cos 2\varphi)\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right);$$

второго уравнения системы

$$A_2 = +1,$$
$$B_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\cos 2\varphi\right]+p\sin\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\sin 2\varphi,$$
$$C_2 = -2(p\cos 2\varphi-\sin 2\varphi)\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right);$$

третьего уравнения системы

$$B_3 = +\left[\sqrt{3}\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\cos 2\varphi\right]-4p\sin\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\sin 2\varphi,$$
$$C_3 = +2(4p\cos 2\varphi-\sin 2\varphi)\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right),$$
$$D_3 = +\frac{1}{\lambda}\left[\sqrt{3}\sin\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\cos 2\varphi\right]+\frac{4}{\lambda}p\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\sin 2\varphi;$$

четвертого уравнения системы

$$B_4 = +\sqrt{3}\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\cos 2\varphi,$$
$$C_4 = -2\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\sin 2\varphi,$$
$$D_4 = +\frac{1}{\lambda}\left[\sqrt{3}\sin\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)\cos 2\varphi\right].$$

Приравнивая нулю характеристический определитель системы (11), находим

$$(C_3D_4 - C_4D_3)\ (A_1B_2 - A_2B_1) - (A_1C_2 - A_2C_1)\ (B_3D_4 - B_4D_3) = 0.$$

Это условие приводит к уравнению третьей степени относительно p:

$$p\,(\alpha p^2 - 2\beta p + \gamma) = 0. \tag{12}$$

В этом уравнении коэффициенты имеют следующие значения:

$$\alpha = -\gamma = \left[\sqrt{3}\cos 2\varphi - \sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)\right]\cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)\sin 2\varphi,$$

$$\beta = \left[\sqrt{3}\sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)\cos 2\varphi + \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)\right]\sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)\cos 2\varphi +$$

$$+ \sqrt{3}\sin^2 2\varphi.$$

Поскольку коэффициенты α и γ имеют различные знаки, все три корня будут вещественными, и система уравнений принадлежит к гиперболическому типу.

3. Определим тип системы при условии пластичности в форме постоянства наибольшего касательного напряжения. Если σ_1 и σ_3 лежат в плоскости rOz, то условие пластичности можно представить в форме

$$(\sigma_z - \sigma_r)^2 + 4\tau_{rz}^2 = 4k^2. \tag{13}$$

В случае, если $\sigma_\theta = \sigma_1$ или $\sigma_\theta = \sigma_3$, то условие пластичности имеет вид

$$(\sigma_z - \sigma_r)^2 + 4\tau_{rz}^2 = (4k + 2\sigma_\theta - \sigma_z - \sigma_r)^2. \tag{14}$$

При условии пластичности (13) основная система уравнений может быть приведена к виду

$$B_1\varphi_{zz} = F_1,\ A_2(\omega - \sigma)_{zz} + C_2\lambda_{zz} = F_2,\ A_3(\omega - \sigma)_{zz} + B_3\varphi_{zz} + C_3\lambda_{zz} = F_3. \tag{15}$$

Характеристический определитель приводит к уравнению четвертого порядка относительно p:

$$(p^2\cos 2\varphi - 2p\sin 2\varphi - \cos 2\varphi)^2 = 0. \tag{16}$$

Корни этого уравнения будут

$$p = \pm\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm \varphi\right) \tag{17}$$

и, следовательно, система уравнений принадлежит к гиперболическому типу.

При условии пластичности в форме (14) основная система принадлежит в общем случае к эллиптическому типу, переходящему в гиперболический при $\varepsilon_\theta = 0$.

4. Таким образом, решение задачи теории пластичности при осевой симметрии сводится в общем случае к интегрированию системы трех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа.

Если перемещение вдоль оси z — известная функция координат, система уравнений переходит в гиперболический тип и эффективное решение может быть найдено методом характеристик. Отметим, что этот случай может иметь место при сжатии цилиндрических тел. Частный случай сжатия сплошного кругового цилиндра рассмотрен в ([3]).

Поступило
9 VII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. S. Simonds, Quart. of Appl. Math., **6**, No. 4 (1949). [2] В. В. Соколовский, ДАН, **62**, № 2 (1948). [3] К. В. Руппенейт, ДАН, **72**, № 2 (1950).