

Г. К. МИХАЙЛОВ

**К ЗАДАЧЕ О ФИЛЬТРАЦИИ В АНИЗОТРОПНЫХ ЗЕМЛЯНЫХ  
ПЛОТИНАХ ТРАПЕЦОИДАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ  
НА ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ВОДОУПОРЕ**

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 2 VIII 1951)

Рассмотрим фильтрацию в трапециoidalной плотине с вертикальным верхним откосом (см. рис. 1). Грунт плотины предположим однородным и анизотропным; одна главная ось анизотропии горизонтальна.

Дополним плотину  $ABCDE$  до треугольника  $AME$ . Пусть  $x$  и  $x'$  — горизонтальный и вертикальный коэффициенты фильтрации;  $q$  — фильтрационный расход основной трапециoidalной плотины;  $Q$  — фильтрационный расход при заполнении треугольной плотины  $AME$  до гребня. Введем безразмерные характеристики  $\tilde{h} = h/H$  и  $\tilde{q} = q/Q$ .

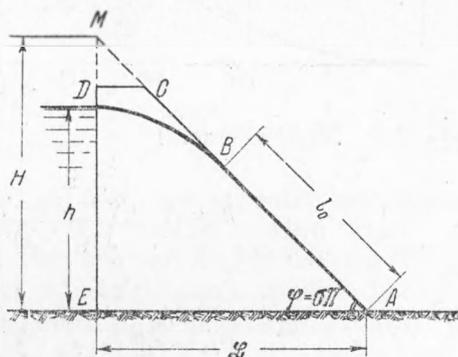


Рис. 1

Известным способом <sup>(1)</sup> поставленная анизотропная задача может быть сведена к изотропной. Из гидромеханического решения для изотропной треугольной плотины <sup>(2)</sup> легко найти  $Q = \pi H^2 / L$ . Фильтрационный расход здесь не зависит от  $x'$ , так как линии тока в этом случае горизонтальны.

Рассмотрим два крайних значения величины  $x'$  при неизменном значении  $x$ . При  $x' = 0$  линии тока горизонтальны, и гидромеханическая схема фильтрации совпадает с гидравлической схемой Н. Т. Мелешенко <sup>(3)</sup>. Для этого случая можно найти зависимость

$$\tilde{q} = \tilde{h} - (\tilde{h} - 1) \ln(1 - \tilde{h}). \quad (1)$$

При  $x' \rightarrow \infty$  эквипотенциалы вертикальны и гидромеханическая схема совпадает с гидравлической схемой Дюпюи — Павловского <sup>(4, 5)</sup>

$$\tilde{q} = 1 - \sqrt{1 - \tilde{h}^2}. \quad (2)$$

Графики обеих зависимостей приведены на рис. 2. Максимальное абсолютное расхождение кривых составляет 0,112 и имеет место при

$\tilde{h} = 0,946$ ; максимальное относительное отклонение кривой 1 от 2 составляет 19,6% и имеет место при  $\tilde{h} = 0,822$ .

Можно предположить, что при монотонном изменении  $x'$  от  $\infty$  до 0 изменение расхода  $\tilde{q}$  будет также монотонно и кривые  $\tilde{q} = \tilde{q}(\tilde{h})$  для изотропных плотин рассматриваемого профиля окажутся лежащими между приведенными кривыми 1 и 2.

Проверка высказанной гипотезы проведена путем гидромеханического исследования изотропной задачи.

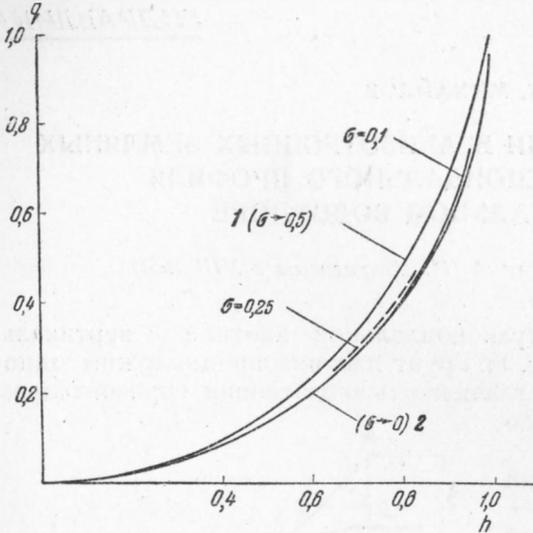


Рис. 2

П. Я. Полубаринова-Кочина <sup>(6,1)</sup> принципиально разрешила изотропную задачу. Ею были выведены для комплексного потенциала и для основных параметров задачи  $h, L, l_0$  и  $q/x$  общие формулы в интегралах от гипергеометрических функций Гаусса. Эти формулы проверены нами и приведены с помощью гауссовых преобразований <sup>(7)</sup> к областям сходимости гипергеометрического ряда:

$$l_0 = A \int_0^1 \frac{F(\sigma; \sigma; \sigma + 1/2; x)}{x^{1-\sigma} \sqrt{(x+a)}} dx, \quad (3)$$

$$h = A \int_0^1 \frac{F(\sigma; 1/2; \sigma + 1/2; 1-x)}{(1-x)^{1-\sigma} \sqrt{x} \sqrt{1-(1+a)x}}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{q}{x} &= A \frac{(-\sigma)!^2 (1/2 - \sigma) \sin^2 \varphi}{(1/2 - \sigma)!^2 \cos \varphi} \int_0^1 \frac{F(1-\sigma; 1-\sigma; 3/2 - \sigma; 1-x) dx}{(1-x)^{\sigma-1/2} \sqrt{x(x+a)}} = \\ &= l_0 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} - A \frac{(-\sigma)!^2 (1/2 - \sigma)}{(1/2 - \sigma)!^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi} \int_0^1 \frac{F(1/2; 1/2; 3/2 - \sigma; x)}{\sqrt{x(x+a)}} dx, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} L &= A \int_0^1 \frac{F(\sigma; \sigma; \sigma + 1/2; -ax)}{a^{1-\sigma} x^{1-\sigma} \sqrt{1-x}} dx = \\ &= A \int_0^1 \frac{F(\sigma; \sigma; \sigma + 1/2; -x)}{x^{1-\sigma} \sqrt{a-x}} dx + A \int_{1/a}^1 \frac{F(\sigma; 1/2; \sigma + 1/2; \frac{ax}{1+ax})}{a^{1-\sigma} x^{1-\sigma} (1+ax)^\sigma \sqrt{1-x}} dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $a$  — вспомогательный параметр, определяемый шириною плотины;  $A$  — произвольная постоянная моделирования.

Практические расчеты проведены путем разложения в ряды. При малых значениях  $\sigma$  и значениях  $a > 1$ , отвечающих практическим задачам гидротехники, удобны следующие разложения:

$$l_0 = \frac{1}{\sqrt{1+a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma+n-1)!^2 (\sigma-1/2)! B(n+\sigma; 1)}{(\sigma-1)!^2 (\sigma+n-1/2)! n!} F\left(1/2; 1; \sigma+n+1; \frac{1}{1+a}\right), \quad (7)$$

$$\int_0^1 \frac{F(1/2; 1/2; 3/2 - \sigma; x)}{\sqrt{x(x+a)}} dx = \frac{1}{\pi \sqrt{1+a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1/2)! (1/2 - \sigma)!}{(n+1/2 - \sigma)! n! (n+1/2)} F\left(1/2; 1; n+3/2; \frac{1}{1+a}\right), \quad (8)$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} p (\nu_n \bar{I}^n + \mu_n \bar{I}^n) + \frac{(-1)^n}{\sqrt{a-1}} \frac{(\sigma+n-1)! (\sigma-1/2)!}{(\sigma-1)! (\sigma+n-1/2)! n! (n+\sigma)} F\left(1/2; 1; n+\sigma+1; \frac{-1}{a-1}\right), \quad (9)$$

$$h = p \frac{\pi}{\sqrt{1+a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n + 2\nu_n \left[ \ln 2 + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} + \ln \sqrt{1+a} \right]}{n B(n; 1/2) (1+a)^n}, \quad (10)$$

где введены обозначения:

$$\bar{I}^n = - \int_{\frac{1}{1+a}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^n \ln x dx}{\sqrt{x} \sqrt{(a+1)x-1}}, \quad \bar{I}^n = \int_{\frac{1}{1+a}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^n dx}{\sqrt{x} \sqrt{(1+a)x-1}}$$

$$\frac{F(\sigma; 1/2; \sigma+1/2; 1-x)}{(1-x)^{1-\sigma}} \equiv \frac{-p [(\ln x - R) F(\sigma; 1/2; 1; x) + \alpha_n x^n]}{(1-x)^{1-\sigma}} \equiv p (\mu_n x^n - \nu_n x^n \ln x).$$

С помощью указанных разложений были проведены вычисления величин  $h$ ,  $L$ ,  $l_0$  и  $q/x$  для случая  $\sigma = 0,1$  ( $\varphi = 18^\circ$ ). При этом параметру  $a$  придавались значения 1; 9; 99; 999; ...; 99 999 999 999;  $10^{18}-1$ . Кривая  $\tilde{q} = \tilde{q}(\tilde{h})$  при  $\sigma = 0,1$  оказалась весьма близка к кривой Дюпюи — Павловского. Максимальные расхождения меж ними при  $\tilde{h} < 0,8$  менее 1% и растут с ростом  $\tilde{h}$ , не достигая при  $\tilde{h} = 0,95$  4%.

При  $\sigma \rightarrow 0$  гидромеханическая схема фильтрации приближается к схеме Н. Н. Павловского и кривая  $\tilde{q} = \tilde{q}(\tilde{h})$  в пределе совпадает с кривой 2, что подтверждено вычислениями при весьма малых значениях  $\sigma$ .

В практике гидротехнического строительства для малых плотин  $\text{ctg } \varphi \geq 1,5$ , а для высоких плотин  $\text{ctg } \varphi \geq 2,5$  (8). Некоторые вычисления при  $\text{ctg } \varphi = 1$  (см. рис. 2) показывают, что даже в этих пределах отклонения гидромеханических зависимостей от кривой 2 сравнительно невелики. Отсюда следует, что решение Н. Н. Павловского для фильтрационного расхода рассматриваемого типа плотин дает вполне точные для практики результаты.

При малых значениях  $a$  величины  $L$  и  $l_0$  допускают почленное интегрирование, приводящее к рядам типа (7) — (8). Для двух других параметров приходится вводить более сложные разложения, деля участок интегрирования на две части (общие формулы ввиду их громоздкости не приведены).

Вычисления при  $a \ll 1$  показали, что при  $\sigma \rightarrow 0,5$  кривая  $\tilde{q} = \tilde{q}(\tilde{h})$  стремится совпасть с кривой 1, приближаясь к ней снизу.

Изложенное подтверждает полностью высказанную выше гипотезу. Отметим, что вычисления проводились с получением не менее 3—4 верных значащих цифр в окончательных результатах.

Переходя к определению участка высачивания, следует указать, что отношение фильтрационного расхода к величине промежутка высачивания почти не зависит от конструкции плотины, определяясь наклоном низового откоса. Это положение принято без обоснования всеми гидравлическими методами расчета, но может быть получено из анализа отдельных гидромеханических исследований<sup>(9, 10, 11)</sup>. Подсчеты при  $\sigma = 0,1$  полностью подтвердили это положение. Упомянутое отношение при  $\tilde{h} < 0,85$  сохраняет постоянную величину 0,0870, при увеличении  $\tilde{h}$  до 0,95 достигает 0,0883 и при  $\tilde{h} = 1$  составляет  $\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi = 0,1004$ . Так как на практике  $\tilde{h}$  всегда менее 0,75, ясно, что во всей области практических расчетов с весьма высокой степенью точности можно использовать значения  $q/xl_0$ , полученные, например, для притока к откосу из бесконечности. Такая задача рассмотрена С. В. Фальковичем<sup>(11)</sup>. Им дана формула  $q/xl_0 = f(\varphi)$ , которую удобнее представить в виде ряда

$$\frac{xl_0}{q} = \frac{4^\sigma}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n+k} [k-2(1-\sigma)]!}{(n+\sigma)^2 k! [-2(1-\sigma)]!} \quad (11)$$

При наличии метода определения фильтрационных расходов последняя формула (в виде графика или таблицы) полностью разрешает инженерную задачу определения величины промежутка высачивания.

Таким образом, решение для притока из бесконечности дает в масштабе фильтрационного расхода всю локальную картину фильтрации в пределах участка высачивания и низового клина плотины.

Вопрос об учете верхового клина может считаться решенным путем применения дополнительного фиктивного прямоугольника<sup>(2, 12)</sup>, величину которого удобно получить из анализа фильтрации, воспользовавшись локальным рассмотрением верхового клина в масштабе фильтрационного расхода. Из числового анализа притока к горизонтальному дренажу в трапециoidalных плотинах нами выведена простая приближенная формула для ширины дополнительного фиктивного прямоугольника

$$\Delta L = \frac{h}{2 + \operatorname{tg} \psi}, \quad (12)$$

где  $\psi$  — угол наклона верхового откоса к горизонту.

Для облегчения приближенного построения кривой депрессии в теле плотины следует использовать имеющиеся расчеты для притока к горизонтальному дренажу (парабола Козени), к вертикальному откосу (П. Я. Полубаринова-Кочина) и параболу Дюпюи, которые будут являться граничными для всех других схем плотин.

В заключение приношу благодарность Е. И. Охапкиной, взявшей на себя труд проведения части вычислений к рассматриваемой задаче.

Поступило  
21 VI 1951

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> П. Я. Полубаринова-Кочина, Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод, 1942. <sup>2</sup> Ф. Б. Нельсон-Скорняков, Расчет движения грунтовых вод через земляные плотины, 1936. <sup>3</sup> Н. Т. Мелешенко, Гидротехнич. стронт., № 2—3, 21 (1932). <sup>4</sup> A. J. Dupuit, Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux . . . , 1863. <sup>5</sup> Н. Н. Павловский, О фильтрации воды через земляные плотины, 1931. <sup>6</sup> П. Я. Полубаринова-Кочина, Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 45 (1939). <sup>7</sup> C. F. Gauss, Werke, 3, 1876. <sup>8</sup> М. М. Гришин, Гидротехнические сооружения, ч. 1, 1947. <sup>9</sup> A. Casagrande, Journ. New England Water Works Ass., 51, № 2, 131 (1937). <sup>10</sup> С. Н. Нумеров, Изв. НИИ гидротехники, 25, 115 (1939). <sup>11</sup> П. Я. Полубаринова-Кочина и С. В. Фалькович, Прикладн. матем. и мех., 11, 6, 629 (1947). <sup>12</sup> Е. А. Замарин, Ирригация и гидротехника, № 8, 18 (1935).