

С. Я. ХАВИНСОН

ОЦЕНКА СУММ ТЕЙЛОРА ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 VII 1951)

Рассмотрим множество B ограниченных в единичном круге аналитических функций и множество функций $B_1 \subset B$ таких, что $\sup_{|z| < 1} |f(z)| \leq 1$.

Через $S_{n,\alpha}^x(f)$ обозначим значение частной суммы Тейлора функции $f(z)$ при разложении в окрестности точки α , $|\alpha| < 1$, вычисленное в точке x , лежащей на единичной окружности:

$$S_{n,\alpha}^x(f) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} (x - \alpha)^{n-1}.$$

Поставим задачу нахождения $\sup_{f \in B_1} |S_{n,\alpha}^x(f)| = \|S_{n,\alpha}^x\|$ (эта верхняя грань будет нормой линейного функционала $S_{n,\alpha}^x(f)$ на пространстве B).

В случае, когда $\alpha = 0$ — центр круга, Э. Ландау ⁽¹⁾ нашел, что

$$\|S_{n,0}^x\| = \sup_{f \in B_1} |S_{n,0}^x(f)| = 1 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}\right)^2 \sim \frac{1}{\pi} \ln n.$$

В настоящей заметке устанавливаются асимптотические формулы в случае $\alpha \neq 0$. Без ограничения общности считаем α действительным и положительным.

Доказывается, что:

А. Если $x \neq 1$, то

$$\|S_{n,\alpha}^x\| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha n}} \frac{1-\alpha}{|1-x|} \left(\frac{|x-\alpha|}{1-\alpha}\right)^n.$$

Эта формула установлена проф. А. И. Маркушевичем и с его любезного разрешения публикуется здесь впервые.

Б. Если $x = 1$, то $\|S_{n,\alpha}^1\| \sim \frac{1}{2\pi} \ln n$. (Заметим, что прямое применение оценки Ландау в нашем случае дает лишь, что $\|S_{n,\alpha}^1\| \leq \frac{1}{\pi} \ln n$, т. е. коэффициент, завышенный вдвое.)

Доказательство. Пусть Γ — произвольный контур, лежащий в замкнутом единичном круге, охватывающий точку α и такой, что точка x лежит вне его.

$$\begin{aligned}
S_{n, \alpha}^x(f) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(t) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-\alpha)^k}{(t-\alpha)^k} \right) dt = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-\alpha} \left(1 + \frac{x-\alpha}{t-\alpha} + \dots + \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(t-\alpha)^{n-1}} \right) dt = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-\alpha} \frac{1 - \left(\frac{x-\alpha}{t-\alpha} \right)^n}{1 - \frac{x-\alpha}{t-\alpha}} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) (x-\alpha)^n dt}{(t-\alpha)^n (x-t)}, \quad (1)
\end{aligned}$$

Первый интеграл равен нулю, так как точка x лежит вне контура Γ . Получаем, что

$$S_{n, \alpha}^x(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) (x-\alpha)^n dt}{(x-t) (t-\alpha)^n}.$$

Пусть, сперва, $x \neq 1$. Будем вести в (1) интегрирование по контуру, состоящему из дуги окружности $|x|=1$ и маленькой дуги, охватывающей точку x .

$$\begin{aligned}
|S_{n, \alpha}^x(f)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{|f(t)| |x-\alpha|^n |dt|}{|x-t| |t-\alpha|^n} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{|x-\alpha|^n |dt|}{|x-t| |t-\alpha|^n} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{|x-\alpha|^n}{(1-\alpha)^n} \left[\int_{-\delta}^{+\delta} \frac{(1-\alpha)^n d\theta}{|x-t| |t-\alpha|^n} + O(q(\delta)^n) \right], \quad (2)
\end{aligned}$$

где $q(\delta) = \left| \frac{1-\alpha}{e^{i\delta}-\alpha} \right| < 1$.

Применяя к интегралу метод оценки, описанный в (2), получаем:

$$|S_{n, \alpha}^x(f)| \leq \frac{1}{V 2\pi\alpha n} \frac{1-\alpha}{|1-x|} \left(\frac{|x-\alpha|}{1-\alpha} \right)^n. \quad (3)$$

Кроме того, легко видеть, что для функций $f_n(z) = \frac{z^{[n/2]} (z-\alpha)^{[n/2]}}{(1-\alpha z)^{[n/2]}}$ в (2) и (3) имеют место асимптотические равенства. Это доказывает оценку А.

Пусть теперь $x=1$. Возьмем произвольные числа $s>0$ и $p>0$ и построим контур Γ_n , состоящий из дуги γ_n окружности с центром в точке 1 и радиуса s/n и дуги L_n окружности $|x|=1$.

$$\begin{aligned}
S_{n, \alpha}^1(f) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{(1-\alpha)^n f(t) dt}{(1-t) (t-\alpha)^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\gamma_n} + \int_{s/n}^{p/\sqrt{n}} \frac{1/\ln n}{p/\sqrt{n}} + \int_{p/\sqrt{n}}^{2\pi-1/\ln n} \frac{2\pi-1/\ln n}{1/\ln n} + \int_{2\pi-1/\ln n}^{2\pi-p/\sqrt{n}} \frac{2\pi-p/\sqrt{n}}{2\pi-p/\sqrt{n}} \right\} \quad (4)
\end{aligned}$$

($t=e^{i\theta}$ на L_n и пределы интегрирования взяты по θ).

Вычисляя максимальные значения модуля подинтегрального выражения, установим, что все интегралы, кроме второго и четвертого, ограничены константами, не зависящими от f^* . Поэтому

* Для оценки третьего и пятого интегралов применяется интегрирование по частям.

$$|S_{n,\alpha}^1(f)| \leq \frac{1}{2\pi} 2 \int_{s/n}^{p/\sqrt{n}} \frac{(1-\alpha)^n d\theta}{|1-t||t-\alpha|^n} \leq \frac{1}{\pi} \int_{s/n}^{p/\sqrt{n}} \frac{d\theta}{\theta} \sim \frac{1}{2\pi} \ln n,$$

т. е.

$$\|S_{n,\alpha}^1\| \leq \frac{1}{\pi} \ln n. \quad (5)$$

Докажем, что оценка (5) является асимптотически точной. Для простоты считаем $n = 2n$. Положим:

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \left(\frac{z-\alpha}{1-\alpha z}\right)^m \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2m} + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2m-2)} z + \dots + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} z^{m-1} + z^m = \\ &= \frac{1 \cdot 3}{1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} z + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2m-2)} z^{m-1} + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2m} z^m} = \\ &= \frac{(z-\alpha)^m}{(1-\alpha z)^m} \frac{\tilde{P}_m(z)}{P_m(z)}. \end{aligned} \quad (6)$$

На дуге $[s/n, p/\sqrt{n}]$ имеем:

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-t}} - P_m(t) \right| = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2(m+1)\varphi d\varphi}{1 - \sin^2 \varphi t} \right| \leq \frac{1}{\pi \sqrt{m\pi} \sin \theta} \sim \frac{1}{\pi^{3/2} \sqrt{m\theta}}.$$

Отсюда:

$$\frac{\left| \frac{1}{\sqrt{1-t}} - P_m(t) \right|}{\left| \frac{1}{\sqrt{1-t}} \right|} \leq \frac{\frac{1}{\pi^{3/2} \sqrt{m\theta}}}{\frac{1}{\sqrt{\theta}}} = \frac{1}{\pi^{3/2} \sqrt{m} \sqrt{\theta}} \leq \frac{1}{\pi^{3/2} \sqrt{m} \sqrt{\frac{s}{m}}} = \frac{1}{\pi^{3/2} \sqrt{s}}. \quad (7)$$

Такая же оценка имеет место и для дуги $[2\pi - p/\sqrt{n}, 2\pi - s/n]$. Из (7) следует, что на этих дугах

$$\left| \arg \frac{1}{\sqrt{1-t}} - \arg P_m(t) \right| \leq \arccos \frac{1}{\pi^{3/2} \sqrt{s}}. \quad (8)$$

Из (8) получаем:

$$\begin{aligned} \left| \arg \frac{1}{1-t} - 2 \arg P_m(t) \right| &= \left| 2 \left(\arg \frac{1}{\sqrt{1-t}} - \arg P_m(t) \right) \right| \leq \\ &\leq 2 \arccos \frac{1}{\pi^{3/2} \sqrt{s}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь на наших участках имеем:

$$\begin{aligned} \left| \arg \frac{f_n(t) (1-\alpha)^n t}{(t-\alpha)^n (1-t)} \right| &= \left| \arg t + \left(\arg \frac{1}{1-t} - 2 \arg P_m(t) \right) \right| \leq \\ &\leq 3 \arccos \frac{1}{\pi^{3/2} \sqrt{s}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Подберем s столь большим, чтобы

$$\cos \arg \frac{f_n(t) (1-\alpha)^n t}{(t-\alpha)^n (1-t)} > 1 - \varepsilon. \quad (11)$$

* Мы пользуемся формулой Валлиса для коэффициентов разложения $\frac{1}{\sqrt{1-t}}$ и ее оценкой (см. (2)).

На наших дугах имеем также:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-\alpha}{|t-\alpha|} \right)^n &= \left(\frac{1-\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha \cos \theta}} \right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\alpha}{(1-\alpha)^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \right)^n \gg \\ &\geq \frac{1}{\left[1 + \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \theta^2 \right]^m} \geq \frac{1}{\left[1 + \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \frac{p^2}{n} \right]^{n/2}} \rightarrow \frac{1}{e^{p^2 \alpha / 2 (1-\alpha)^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подберем p столь малым, чтобы

$$\left(\frac{1-\alpha}{|t-\alpha|} \right)^n > 1 - \varepsilon. \quad (13)$$

Получим теперь:

$$\operatorname{Re} \frac{f_n(t)(1-\alpha)^n t}{(t-\alpha)^n(1-t)} = \left| \frac{f_n(t)(1-\alpha)^n t}{(t-\alpha)^n(1-t)} \right| \cos \arg \frac{f_n(t)(1-\alpha)^n t}{(t-\alpha)^n(1-t)} \geq \frac{(1-\varepsilon)^2}{|1-t|}. \quad (14)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} |S_{n,\alpha}^1(f_n)| &\geq \left| \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{s/n}^{p/\sqrt{n}} \frac{f_n(t)(1-\alpha)^n t d\theta}{(t-\alpha)^n(1-t)} + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi-p/\sqrt{n}}^{2\pi-s/n} \frac{f_n(t)(1-\alpha)^n t d\theta}{(t-\alpha)^n(1-t)} \right| - O(1) \geq \\ &\geq 2 \frac{1}{2\pi} \int_{s/n}^{p/\sqrt{n}} \frac{(1-\varepsilon)^2 d\theta}{|1-t|} - O(1) \sim \frac{(1-\varepsilon)^2}{\pi} \int_{s/n}^{p/\sqrt{n}} \frac{d\theta}{\theta} \sim \frac{(1-\varepsilon)^2}{2\pi} \ln n. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как ε — произвольное число, то (15) вместе с (5) полностью доказывают оценку B .

Я выражаю глубокую благодарность проф. А. И. Маркушевичу, под руководством которого сделана эта работа.

Поступило
6 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 1929. ² Г. Поля и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, ч. 1, отдел II, Задачи №№ 201, 202, 1937.