Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 3

МАТЕМАТИКА

А. Г. НАФТАЛЕВИЧ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 VII 1951)

1. В этой заметке изучается рост мероморфной функции, лорановские разложения которой в окрестностях заданных точек $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, начинаются с заданных групп членов.

Теорема 1. *Для любой данной последовательности комплексных чисел $\{\lambda_n\}$, сходящейся к бесконечности, и для произвольной конечной по строкам таблицы комплексных чисел*

$$a_n^{(-l_n)},\ a_n^{(-l_n+1)}, \ldots, a_n^{(-1)}, a_n^{(0)}, \ldots, a_n^{(k_n-l_n-1)}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad 0 \leqslant l_n \leqslant k_n,$$

можно построить такую мероморфную функцию $f(z)$, лорановское разложение которой в окрестности каждой из точек λ_n начинается с группы членов

$$\frac{a_n^{(-l_n)}}{(z-\lambda_n)^{l_n}} + \cdots + \frac{a_n^{(-1)}}{(z-\lambda_n)} + a_n^{(0)} + \cdots + a_n^{(k_n-l_n-1)}(z-\lambda_n)^{k_n-l_n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

что ее порядок, тип и класс будут, соответственно, не выше, чем порядок, тип и класс функции $n(r)$. Здесь $n(r)$ обозначает число точек λ_i в круге радиуса r, причем каждая точка λ_i считается k_i раз.

Заметим, что среди точек λ_i могут иметься полюсы функции $f(z)$ (если $l_i > 0$); однако совокупность всех полюсов $f(z)$, вообще говоря, не исчерпывается заданными точками. Иными словами, если мы потребуем, чтобы искомая функция $f(z)$ не имела бы других полюсов, помимо заданных, то нельзя уже будет утверждать, что порядок $f(z)$ может быть сделан не выше порядка $n(r)$.

2. Возникает вопрос, что можно сказать о порядке, типе и классе $f(z)$ при введении дополнительного предположения, что все полюсы $f(z)$ содержатся среди заданных точек $\{\lambda_i\}$?

Для случая порядка этот вопрос был разрешен Уиттекером [1] в следующих терминах.

Пусть $h > 0$ выбрано так, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^{-h}$ сходится (существование такого h предполагает конечность показателя сходимости последовательности $\{\lambda_i\}$); опишем около каждой точки λ_i, как около центра, круг K_i радиуса $|\lambda_i|^{-h}$. Множество точек $\bigcup \overline{K_i}$ состоит из связных компонент (континуумов), которые Уиттекер называет «о б л а к а м и»; каждое «облако» образовано конечным числом кругов K_i и содержит конечное множество точек λ_i — г р у п п у п о л ю с о в. Обозначая «облака» буквами $H_1, H_2, H_3, \ldots$, пронумеруем их так, чтобы наибольшие модули R_i точек «облаков» H_i не убывали. Пусть

$$\frac{A_{i,1}}{z-\lambda_i}+\frac{A_{i,2}}{(z-\lambda_i)^2}+\cdots+\frac{A_{i,k_i}}{(z-\lambda_i)^{k_i}} \tag{1}$$

заданные главные части мероморфной функции.

Представим сумму всех главных частей (1), относящихся к группе полюсов $\lambda_{i,1}, \ldots, \lambda_{i,n_i}$ «облака» H_i, в виде:

$$\frac{P_i(z)}{(z-\lambda_{i,1})^{k_{i,1}}(z-\lambda_{i,2})^{k_{i,2}}\cdots(z-\lambda_{i,n_i})^{k_{i,n_i}}}=\frac{B_{i,1,1}}{z-\lambda_{i,1}}+\frac{B_{i,1,2}}{(z-\lambda_{i,1})^2}+\cdots+\frac{B_{i,1,k_{i,1}}}{(z-\lambda_{i,1})^{k_{i,1}}}+$$

$$+\frac{B_{i,2,1}}{(z-\lambda_{i,1})^{k_{i,1}}(z-\lambda_{i,2})}+\frac{B_{i,2,2}}{(z-\lambda_{i,1})^{k_{i,1}}(z-\lambda_{i,2})^2}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{B_{i,n_i,k_{i,n_i}}}{(z-\lambda_{i,1})^{k_{i,1}}(z-\lambda_{i,2})^{k_{i,2}}\cdots(z-\lambda_{i,n_i})^{k_{i,n_i}}}; \tag{2}$$

если $k_{i,1}+k_{i,2}+\cdots+k_{i,n_i}=s_i$, то $P_i(z)$ есть многочлен степени s_i-1.

Пусть P_i — наибольший из модулей коэффициентов многочлена $P_i(z)$, B_i — наибольшее из чисел $|B_{i,l,\gamma}|$ (i фиксировано); положим:

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\frac{\ln^+\ln^+P_i}{\ln R_i}=\nu_1,\quad \overline{\lim_{i\to\infty}}\frac{\ln^+\ln^+B_i}{\ln R_i}=\nu,\quad \overline{\lim}\frac{\ln n(r)}{\ln(r)}=\mu. \tag{3}$$

Тогда имеет место следующая теорема Уиттекера:

Существует мероморфная функция $f(z)$ с главными частями (1) *порядка* $\rho=\max(\nu_1,\mu)=\max(\nu,\mu)$, *но не существует мероморфной функции с теми же главными частями меньшего порядка.*

3. Условимся говорить, что последовательность $\{x_i\}$ имеет порядок α (относительно последовательности $\{R_i\}$, $R_i>0$, $R_i\to\infty$), если $\overline{\lim_{i\to\infty}}\frac{\ln^+\ln^+|x_i|}{\ln R_i}=\alpha$; последовательность $\{x_i\}$ порядка α назовем последовательностью максимального, нормального, или минимального типа, в зависимости от того, является ли $\overline{\lim_{i\to\infty}}\frac{\ln^+|x_i|}{R_i^\alpha}$ бесконечным, конечным положительным или нулем.

Сравнивая последовательность $\{B_i\}$ с функцией $n(r)$, назовем п р е о б л а д а ю щ и м ф а к т о р о м ту из них, порядок которой больше, а при равенстве порядков — ту, тип которой больше. При этих обозначениях можно доказать следующее предложение, дополняющее теорему Уиттекера.

Т е о р е м а 2. *Существует мероморфная функция с главными частями* (1), *порядок и тип которой не превосходят порядка и типа преобладающего фактора из последовательности* $\{B_i\}$ *и функции* $n(r)$.

Если $\nu\neq\mu$ (*см.* (3)), *то не существует мероморфной функции с главными частями* (3) *более низкого порядка или более низкого типа, чем порядок, соответственно, тип преобладающего фактора. Если* $\nu=\mu$ *и* $n(r)$ *является преобладающим фактором, то это утверждение остается в силе. Если* $\nu=\mu$ *и* $\{B_i\}$ — *преобладающий фактор,* *то может существовать мероморфная функция типа меньшего, чем тип $\{B_i\}$. Но фиксировав последовательность полюсов $\{\lambda_i\}$ и порядок и тип последовательности $\{B_i\}$, можно так подобрать коэффициенты $A_{i,j}$ в выражениях для главных частей, что не найдется мероморфной функции $f(z)$ с главными частями* (1) *меньшего порядка и типа, чем порядок и тип последовательности $\{B_i\}$.*

Примечание. Если последовательность $\{B_i\}$ или $n(r)$ максимального типа, то можно уточнить теорему 2, вводя следующие обозначения:

а) $\{B_i\}$ обобщенного порядка $(\nu, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k)$, если $\lg^+ B_i = O[R_i^\nu (\lg R_i)^{\rho_1} \cdots$ $\cdots (\lg_k R_i)^{\rho_k+\varepsilon}]$ для любого $\varepsilon > 0$, но

$$\lg^+ B_i \neq O[R_i^\nu (\lg R_i)^{\rho_1} \cdots (\lg_k R_i)^{\rho_k - \varepsilon}];$$

б) если а) выполнено, то $\{B_i\}$ максимального, нормального или минимального типа в зависимости от того, является ли

$$\overline{\lim} \frac{\lg^+ B_i}{R_i^\nu (\lg R_i)^{\rho_1} \cdots (\lg_k R_i)^{\rho_k}}$$

бесконечным, конечным положительным или нулем.

Рост функции $n(r)$ будем также характеризовать обобщенным порядком $(\mu, h_1, h_2, \ldots, h_l)$ и соответствующим типом. Введем понятие преобладающего фактора по отношению к обобщенному порядку и типу; если ν и μ не равны одновременно нулю, то в теореме 2 слово «порядок» можно заменить словом «обобщенный порядок». Заметим, что если $\nu = \mu$ и $\{B_i\}$ — преобладающий фактор, то может существовать мероморфная функция с главными частями (1) меньшего обобщенного порядка, чем обобщенный порядок $\{B_i\}$.

4. Обратимся теперь к оценке роста мероморфной функции $f(z)$ в терминах, непосредственно относящихся к заданным главным частям (1) (а не к их группам (2)). Пусть A_i — наибольший модуль коэффициентов $A_{i,j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Определим, как в теореме 2, порядок и тип последовательности $\{A_i\}$ относительно последовательности $\{|\lambda_i|\}$ и введем понятие преобладающего фактора из последовательности $\{A_i\}$ и функции $n(r)$.

В этих обозначениях имеет место теорема 3.

Теорема 3. *Существует мероморфная функция с главными частями* (1) *порядка и типа не большего, чем порядок и тип преобладающего фактора из последовательности $\{A_i\}$ и функции $n(r)$.*

Фиксировав последовательность полюсов, порядок и тип $\{A_i\}$, можно подобрать коэффициенты $A_{i,j}$ главных частей так, чтобы не существовало мероморфной функции с данными главными частями меньшего порядка и типа, чем порядок и тип преобладающего фактора.

Часть этой теоремы, относящаяся к порядку, содержится в цитированной работе Уиттекера.

Примечание. Теорему 3 можно уточнить таким же образом, как была уточнена теорема 2.

Из теоремы 3 легко следует теорема 4.

Теорема 4. *Пусть $\{\lambda_i\}$ — последовательность комплексных чисел, сходящихся к бесконечности,*

$$A_{i,0}, A_{i,1}, \ldots, A_{i,k_i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

некоторая таблица чисел и

$$\gamma_{i,0}+\gamma_{i,1}(z-\lambda_i)+\cdots+\gamma_{i,k_i-1}(z-\lambda_i)^{k_i-1}$$

совокупность первых k_i членов разложения в степенной ряд функции $\frac{(z-\lambda_i)^{k_i}}{g(z)}$, *где*

$$g(z)=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^s}{\lambda_i^s}\right)^{k_i}{}^{*}, \qquad s=[\mu]+1$$

(μ *определяется по формуле* (3)).

Тогда можно построить целую функцию $w(z)$, *разложение которой по степеням* $z-\lambda_i$ *начинается с многочлена*

$$A_{i,0}+A_{i,1}(z-\lambda_i)+\cdots+A_{i,k_i-1}(z-\lambda_i)^{k_i-1} \quad (i=1,2,\ldots),$$

причем порядок и тип функции $w(z)$ *не больше, чем порядок и тип преобладающего фактора из последовательности* $\{L_i\}$ *и функции* $n(r)$, *где* L_i $(i=1,2,\ldots)$ *обозначает наибольший из модулей чисел*

$$L_{i,j}=\gamma_{i,0}A_{i,\gamma}+\gamma_{i,1}A_{i,\gamma-1}+\cdots+\gamma_{i,j}A_{i,0} \quad (j=1,\ 2,\ldots,k_i-1).$$

Теорема 4 точная в таком же смысле, как и теорема 3.

Утверждение теоремы относительно порядка $w(z)$ в несколько иной форме имеется в работе Заки-Мурси ([2]), а также в кандидатской диссертации Г. П. Лапина ([3]), где иными средствами, чем в настоящей работе, достигается более точный результат, а именно, дается точная оценка для типа целой функции (в случае, когда тип нормальный).

Поступило
6 VII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. M. Whittaker, Proc. London Math. Soc. 40, 255 (1935). [2] Zaki-Mursi, Bull. Sci. Math., 73, 96 (1949). [3] Г. П. Лапин, Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка, Кандидатская диссертация, 1950.

* Предполагается, что $\lambda_i^s \neq \lambda_j^s$ для $i \neq j$. Если $\lambda_{i_1}^s=\lambda_{i_2}^s=\cdots=\lambda_{i_j}^s=l_i^s$, то следует взять $g(z)=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^s}{l_i^s}\right)^{B_i}$, где $B_i=\max(k_{i_1}, k_{i_2},\ldots,k_{i_j})$.