Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 3

МАТЕМАТИКА

Академик Н. Н. ЛУЗИН и П. И. КУЗНЕЦОВ

К АБСОЛЮТНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ И ИНВАРИАНТНОСТИ ДО ε В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. III*

В отношении обозначений и нумерации формул мы отсылаем читателя к нашим предыдущим сообщениям (1).

В них рассматривалась система дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f(t), \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{array}\right\} \tag{S}$$

где x_i суть неизвестные функции, зависящие от одного переменного t; a_{ij} — многочлены с постоянными коэффициентами степени не выше второй относительно буквы D, $D = d/dt$; $\mathfrak{D}$ — определитель системы (S), $\mathfrak{D} = |a_{ij}|$, не тождественный нулю; $\mathfrak{D}_{11}$ — его минор, соответствующий элементу a_{11}, и $f(t)$ — произвольная аналитическая функция, голоморфная для $t = t_0$.

Для системы (S) были доказаны следующие две основные теоремы.

1. Если критерий абсолютной инвариантности для x_1 удовлетворен для системы (S) и если эта система допускает решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с нулевыми начальными условиями $[x_i(t_0) = 0,\ x_i'(t_0) = 0]$ при любой аналитической функции $f(t)$, голоморфной в точке t_0, тогда необходимо имеем тождество $x_1(t) \equiv 0$ на всяком интервале (a, b) голоморфизма функции $f(t)$, содержащем точку t_0.

2. Если действительные части всех корней α характеристического уравнения $\mathfrak{D}(\alpha) = 0$ предложенной системы (S) отрицательны и если функция $f(t)$ произвольна за исключением требования иметь на интервале $(-\infty, +\infty)$ все производные порядков $\leqslant 2(n-1)$ непрерывными и содержащимися между $-M$ и $+M$, тогда система (S) допускает одно и только одно предельное ограниченное решение $[\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)]$ на всем бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$. Всякое другое решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системы (S) есть асимптотическое этому ограниченному предельному решению $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Это означает, что имеются одновременные неравенства

$$|\xi_1(t) - x_1(t)| < \varepsilon,\ |\xi_2(t) - x_2(t)| < \varepsilon, \ldots, |\xi_n(t) - x_n(t)| < \varepsilon,$$

где t превзойдет действительное число T, надлежащим образом определенное, $t > T$.

* Подготовлено к печати П. И. Кузнецовым.

Если функция $f(t)$ периодическая с периодом ω, ограниченное предельное решение $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ будет таким же, и имеем равенства

$$\xi_1(t+\omega) = \xi_1(t),\ \xi_2(t+\omega) = \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t+\omega) = \xi_n(t).$$

Для произвольной функции $f(t)$ имеется лишь два логически возможных случая.

Первый случай. Высота H многочлена (по D) $\mathfrak{D}_{11}$ равна нулю, $H=0$. Напомним, что высотой многочлена (по D) $\mathfrak{D}_{11}$ называется неотрицательное число H, $H \geqslant 0$, равное самой большой из абсолютных величин коэффициентов этого многочлена; аналогично пусть h есть высота многочлена (по D) $\mathfrak{D}$. Таким образом, критерием абсолютной инвариантности для x_1 является строгое равенство нулю высоты H, $H=0$. В этом случае функция $\xi_1(t)$ тождественна нулю на интервале $(-\infty, +\infty)$, $\xi_1(t) \equiv 0$.

Второй случай. Высота H отлична от нуля, $H>0$. В этом случае имеем неравенство $|\xi_1(t)| < CHM$ везде на интервале $(-\infty, +\infty)$; здесь C — положительное постоянное, зависящее лишь от коэффициентов многочлена (по D) $\mathfrak{D}$. Если коэффициенты обоих многочленов (по D) $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}_{11}$ независимы каждый от всех остальных, то численная величина высоты H может быть предписана заранее, произвольным образом и независимым от численной величины константы C, посредством надлежащего выбора операторов a_{ij} системы (S), обладающей a priori решением $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с нулевыми начальными данными $[x_i(t_0)=0,\ x_i'(t_0)=0]$.

Если корни α (всегда с отрицательными действительными частями) даны, $\mathfrak{D}(D) = \Pi(D-\alpha)$, и если граница M предписана, всегда можно определить высоту H многочлена $\mathfrak{D}_{11}$ положительной и столь малой, что будем иметь неравенство $|\xi_1(t)| < \varepsilon$ всюду на интервале $(-\infty, +\infty)$, и это, какова бы ни была функция $f(t)$, имеющая на интервале $(-\infty, +\infty)$ производные $f, f', f'', \ldots, f^{2n-2}$ непрерывными и содержащимися между $-M$ и $+M$. В этом случае, каково бы ни было решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системы (S), имеем неравенство $|x_1(t)| < \varepsilon$, когда t превзойдет определенное число T, $t>T$, причем ε есть положительное число, заранее выбираемое и малое сколь угодно.

Невозможно не поразиться аналогией, имеющейся между случаем нулевой высоты H и случаем, когда она весьма мала (при фиксированной константе C). Единственная разница между обоими случаями состоит в том, что решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с нулевыми начальными условиями имеет в первом случае функцию $x_1(t)$ тождественную нулю, а во втором случае абсолютная величина $|x_1(t)|$ меньше ε, когда H достаточно мала (при фиксированной константе C).

Если же константа C не фиксирована, то и при достаточно малой высоте H система (S) может иметь ограниченное предельное решение $\xi_1(t)$ (см. уравнение (6)), совпадающее с данной функцией $f(t)$, $\xi_1(t) = f(t)$: достаточно взять $\mathfrak{D}(D)$ и $\mathfrak{D}_{11}(D)$ тождественными, $\mathfrak{D}(D) \equiv \mathfrak{D}_{11}(D)$.

Для объяснения этого факта заметим, что в рассматриваемом случае константа C безгранично возрастает, когда высота H стремится к нулю.

Рассмотрим теперь случай, когда высота H достаточно велика относительно высоты h. В этом случае может оказаться, что первая неизвестная функция $x_1(t)$ всякого решения $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системы (S) будет иметь бесконечно большое число колебаний со сколь угодно большой амплитудой. Например, если $f(t)$ есть периодическая функция от времени t с периодом 2π,

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{ikt}, \tag{11}$$

то таким же будет ограниченное предельное решение $\xi_1(t)$ уравнения (6), и мы будем иметь

$$\xi_1(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_k e^{ikt}, \tag{12}$$

где

$$\beta_k = \left| \frac{\mathfrak{D}_{11}(ik)}{\mathfrak{D}(ik)} \alpha_k. \tag{13}$$

Мы предположили: 1) что высота h многочлена (по D) $\mathfrak{D}$ остается ограниченной; 2) что высота H многочлена (по D) $\mathfrak{D}_{11}$ безгранично возрастает. В силу классической формулы Лагранжа, наибольшая из $2n+1$ абсолютных величин $|\mathfrak{D}_{11}(ik)|$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n)$ безгранично возрастает вместе с H, потому что степень по D многочлена $\mathfrak{D}_{11}$ ниже, чем $2n-1$. Отсюда мы заключаем, что, каково бы ни было большое положительное число N, существует целое число k_0, содержащееся между $-n$ и $+n$, такое, что имеем

$$\left| \frac{\mathfrak{D}_{11}(ik_0)}{\mathfrak{D}(ik_0)} \right| > N$$

для достаточно большой высоты H. Поэтому, если мы положим

$$f(t) = \frac{r}{2} e^{-ik_0t} + \frac{r}{2} e^{ik_0t} = r \cos k_0 t, \tag{14}$$

где r есть фиксированное положительное число, не зависящее от t, то будем иметь

$$\xi_1(t) = r\rho \cos(k_0 t + \varphi), \tag{15}$$

причем φ — действительное фиксированное число, не зависящее от t и $\rho > N$. Высказанное положение доказано.

Таким образом мы рассмотрели случаи: 1) $H=0$; 2) H достаточно мало; 3) H достаточно велико.

Поступило
2 VIII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Лузин и П. И. Кузнецов, ДАН, **51**, № 4 (1946); **51**, № 5 (1946).