Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 4

МАТЕМАТИКА

С. Б. СТЕЧКИН

О СУММАХ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 2 VIII 1951)

1. Пусть функция $f(x)$ суммируема на отрезке $[0, 2\pi]$, имеет период 2π и

$$\mathfrak{S}[f] \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

— ее ряд Фурье. Обозначим через $s_n(x) = s_n(x, f)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ частные суммы ряда $\mathfrak{S}[f]$ и положим

$$\sigma_{n,m}(x) = \sigma_{n,m}(x, f) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=n-m}^{n} s_k(x, f) \quad (m = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тригонометрические полиномы $\sigma_{n,m}(x)$ были впервые рассмотрены Валле-Пуссеном ([1], [2]) и носят название сумм Валле-Пуссена. Соответствующие полиномы для интерполяционного случая были изучены С. Н. Бернштейном ([3],[4]). Отметим, что $\sigma_{n,0}(x) = s_n(x)$ и $\sigma_{n,n}(x) = \sigma_n(x)$, где $\sigma_n(x)$ — сумма Фейера порядка n для ряда $\mathfrak{S}[f]$.

Пусть C есть пространство непрерывных периодических функций $f(x)$ с нормой $\|f\| = \max\limits_x |f(x)|$. Будем рассматривать $\sigma_{n,m}(x, f)$ как линейные операторы в пространстве C и обозначим через $N_{n,m}$ их нормы. Иными словами, положим

$$N_{n,m} = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \|\sigma_{n,m}(x, f)\| \quad (m = 0, 1, \ldots, n;\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, $N_{n,0} = L_n$ и $N_{n,n} = 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; здесь L_n — константы Лебега. Свойства чисел $N_{n,m}$ играют важную роль во всех приложениях сумм Валле-Пуссена и исследовались Л. Вербицким ([5]) и С. М. Никольским ([6]) *.

В недавних работах ([7],[8]) я указал несколько применений сумм Валле-Пуссена к исследованию наилучших приближений функций и смежным вопросам. Теперь я займусь изучением свойств самих сумм Валле-Пуссена. Именно, я получаю здесь несколько формул для норм $N_{n,m}$ и использую их для исследования свойств этих констант. В частности, я обобщаю и уточняю некоторые результаты Л. Вербицкого и С. М. Никольского.

---

* Необходимо также отметить, что уже Валле-Пуссен ([1],[2]) указал формулу

$$\sigma_{n,m}(x) = \frac{n+1}{m+1}\sigma_n(x) - \frac{n-m}{m+1}\sigma_{n-m-1}(x),$$

из которой непосредственно вытекает неравенство

$$N_{n,m} \leqslant \frac{n+1}{m+1} + \frac{n-m}{m+1} = \frac{2n+1-m}{m+1}.$$

2. Как известно (см. ([5]), формула (15)),

$$N_{n,m} = \frac{1}{\pi(m+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin \frac{2n+1-m}{2} t \cdot \sin \frac{m+1}{2} t \right| \left(2 \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{-1} dt.$$

Используя разложение $\frac{1}{4} \operatorname{cosec}^2 \frac{t}{2}$ по полюсам, выводим отсюда

$$N_{n,m} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} |\sin rt \cdot \sin t| \, t^{-2} dt, \quad r = \frac{2n+1-m}{m+1} = 2\frac{n+1}{m+1} - 1. \tag{1}$$

Отметим несколько следствий из формулы (1).

В работах ([9]) и ([10]) Сеге и Ватсон ввели в рассмотрение константы

$$L_{n/2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(n+1)t|}{\sin t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

которые для четных значений n сводятся к константам Лебега. Используя тот же прием, что и при выводе формулы (1), получаем

$$L_{n/2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} |\sin(n+1)t \cdot \sin t| \, t^{-2} dt. \tag{3}$$

Сравнение этой формулы с формулой (1) для $m = 1$ показывает, что $L_{n/2} = N_{n+1,1}$.

Далее, формула (1) показывает, что величина норм $N_{n,m}$ зависит на самом деле лишь от одного параметра, а именно, от значения r или, что сводится к тому же, от отношения $\frac{n+1}{m+1}$. Поэтому справедлива

Теорема 1. *Если* $0 \leqslant m \leqslant n$, $0 \leqslant m' \leqslant n'$ *и* $\frac{n+1}{m+1} = \frac{n'+1}{m'+1}$, *то* $N_{n,m} = N_{n',m'}$.

В частности, если $\frac{n+1}{m+1} = p$, где p — натуральное число, то $N_{n,m} = N_{p-1,0} = L_{p-1}$, а если $\frac{n+1}{m+1} = \frac{p}{2}$, то $N_{n,m} = N_{p-1,1} = L_{p/2-1}$.

Наконец, интеграл (1) равномерно сходится относительно параметра r на любом конечном интервале $0 < r_0 \leqslant r \leqslant r_1 < \infty$. Отсюда сразу вытекает

Теорема 2. *Зададим последовательности целых неотрицательных чисел* $\{n_p\}$ *и* $\{m_p\}$ $(p = 1, 2, \ldots)$, *причем* $m_p \leqslant n_p$, *и пусть*

$$r_p = 2\frac{n_p+1}{m_p+1} - 1 \to r < \infty \ (p \to \infty).$$

Тогда

$$\lim_{p \to \infty} N_{n_p, m_p} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} |\sin rt \cdot \sin t| \, t^{-2} dt.$$

Это предложение является обобщением одной теоремы С. М. Никольского (([6]), теорема 2).

3. Положим

$$l(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} |\sin xt \cdot \sin t| \, t^{-2} dt. \tag{4}$$

Тогда согласно (1)

$$N_{n,m}=l(r),\quad r=2\frac{n+1}{m+1}-1\quad (m=0,1,\ldots,n;\ n=0,1,2,\ldots),\tag{5}$$

а в силу (3)

$$L_{n/2}=l(n+1)\qquad (n=0,1,2,\ldots).\tag{6}$$

Поэтому для исследования норм $N_{n,m}$ и констант Лебега $L_{n/2}$ достаточно изучить функцию $l(x)$. Используя разложение $|\sin x|$ в ряд Фурье (см. ([9]) или ([11]), § 1.82) и формулу

$$\int_0^\infty \sin^2 ut\cdot\sin^2 t\cdot t^{-2}\,dt=\begin{cases}\frac{\pi}{4}u & \text{для } 0\leqslant u\leqslant 1,\\ \frac{\pi}{4} & \text{для } u\geqslant 1,\end{cases}$$

получаем

$$l(x)=\frac{16}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{4\nu^2-1}\sum_{k\leqslant \nu x}^{*}\frac{1}{2k-1},\tag{7}$$

где вообще

$$\sum_{k\leqslant u}^{*}c_k=\sum_{k=1}^{[u]}c_k+(u-[u])\,c_{[u]+1}.$$

В частности, если $x=p$, где p — натуральное число, то

$$l(p)=\frac{16}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{4\nu^2-1}\sum_{k=1}^{\nu p}\frac{1}{2k-1}.\tag{8}$$

В силу (6) мы получаем отсюда формулу Ватсона для констант $L_{n/2}$ (см. ([10]), формула (4)) и, в частности, формулу Сеге для констант Лебега (см. ([9]) или ([11]), § 8.81).

Формула (7) делает очевидными многие свойства функции $l(x)$ и норм $N_{n,m}$. Прежде всего ясно, что $l(x)$ является возрастающей и вогнутой функцией от x. Поэтому справедлива такая

Теорема 3. *Нормы $N_{n,m}$ представляют собою возрастающую и вогнутую функцию от* $\frac{n+1}{m+1}$.

В частности, при фиксированном n последовательность $\{N_{n,m}\}$ $(m=0,1,\ldots,n)$ убывает, а при фиксированном m последовательность $\{N_{n,m}\}$ $(n=m,m+1,\ldots)$ возрастает.

Далее, из формулы (7) нетрудно усмотреть, что функция $l(x)$ дифференцируема для всех иррациональных x и имеет каждую рациональную точку $x=p/q$ в качестве угловой точки.

Наконец, формула (7) позволяет сразу вывести асимптотическую формулу для $l(x)$ при $x\to\infty$. В самом деле,

$$\sigma(u)=\sum_{k\leqslant u}^{*}\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{2}\ln u+\ln 2+\frac{\gamma}{2}+O\left(\frac{1}{u}\right),$$

где γ — эйлерова постоянная. Поэтому

$$l(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{4\nu^2-1}\left\{\ln\nu x+2\ln 2+\gamma+O\left(\frac{1}{\nu x}\right)\right\}=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\ln x+\frac{8}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\ln\nu}{4\nu^2-1}+\frac{4}{\pi^2}(2\ln 2+\gamma)+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Отсюда вытекает следующая

Теорема 4.

$$N_{n,m} = \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n+1}{m+1} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\ln\nu}{4\nu^2-1} + \frac{4}{\pi^2}(3\ln 2+\gamma) + O\left(\frac{m+1}{n+1}\right). \quad (9)$$

Эта теорема является уточнением одной теоремы, доказанной С. М. Никольским ([6], теорема 1). Полагая в равенстве (9) $m=0$, получаем известную асимптотическую формулу для констант Лебега (см. [12], [13] и [10]).

4. В заключение просуммируем ряды (8). Применяя преобразование Абеля и меняя затем порядок суммирования, получаем

$$l(p) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu+1}\right)\sum_{k=1}^{\nu p}\frac{1}{2k-2} = \frac{2}{p\pi^2}\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(\nu+\frac{1}{2})(\nu+\frac{2\mu-1}{2p})}.$$

Объединяя, далее, во внешней сумме равноотстоящие от концов члены и используя разложение $\pi\operatorname{ctg}\pi x$ по полюсам, находим, что для четного $p=2n$

$$l(2n) = \frac{4}{\pi}\sum_{\mu=1}^{p/2}\frac{1}{2\mu-1}\operatorname{tg}\frac{\pi(2\mu-1)}{2p} = \frac{4}{\pi}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{2\mu-1}\operatorname{tg}\frac{\pi(2\mu-1)}{4\pi}, \quad (10)$$

а для нечетного $p=2n+1$

$$l(2n+1) = \frac{1}{p} + \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{(p-1)/2}\frac{1}{\mu}\operatorname{tg}\frac{\pi\mu}{p} = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{\mu}\operatorname{tg}\frac{\pi\mu}{2n+1}. \quad (11)$$

Так как $l(2n) = L_{n-1/2}$, то формула (10) дает конечное выражение для этих констант и, повидимому, ранее не отмечалась. Аналогично, в силу равенства $l(2n+1) = L_n$, формула (11) эквивалентна формуле Фейера для констант Лебега (см. [14], сноска на стр. 197, [15] и [13]). Наконец, в силу (5), (10) и (11), если $r = 2\frac{n+1}{m+1} - 1$ — целое число, то

$$N_{n,m} = \frac{4}{\pi}\sum_{\mu=1}^{r/2}\frac{1}{2\mu-1}\operatorname{tg}\frac{\pi(2\mu-1)}{2r} \quad (r \text{ четное}),$$

$$N_{n,m} = \frac{1}{r} + \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{(r-1)/2}\frac{1}{\mu}\operatorname{tg}\frac{\pi\mu}{r} \quad (r \text{ нечетное}).$$

Для нечетных m эти формулы установлены Л. Вербицким ([5], формула (14)); наше рассуждение показывает, что они справедливы также и для четных m.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
7 VII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. de la Vallée Poussin, C. R., **166**, 799 (1918). [2] C. de la Vallée Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions, Paris, 1919. [3] С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, № 9, 1151 (1931). [4] С. Н. Бернштейн, ДАН, 4, 1 (1934). [5] Л. Вербицкий, Научн. зап. Днепропетр. гос. ун-та, **21**, 113 (1940). [6] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, 509 (1940). [7] С. Б. Стечкин, ДАН, **75**, 165 (1950). [8] С. Б. Стечкин, ДАН, **76**, 33 (1951). [9] G. Szegö, Math. Zs., **9**, 163 (1921). [10] G. N. Watson, Quart. Journ. of Math., Oxf. ser., **1**, 310 (1930). [11] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М., 1939. [12] L. Fejer, Journ. f. die reine und angew. Math., **138**, 22 (1907). [13] T. H. Gronwall, Math. Ann., **72**, 244 (1912). [14] H. Lebesgue, Bull. Soc. Math. de France, **38**, 184 (1910). [15] L. Fejer, Ann. sc. de' l'Ecole Norm. Sup., (3), **28**, 63 (1911).