Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 3

МАТЕМАТИКА

Л. И. ДОНСКАЯ

О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ИРРЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ $t=\infty$

(Представлено академиком И. Г. Петровским 2 VIII 1951)

Дана система трех линейных однородных дифференциальных уравнений

$$dX/dt = XP, \tag{1}$$

где $P=\sum\limits_{m=0}^{\infty} P^{(m)}t^{-m}$, t вещественное, $P^{(m)}$ вещественные * постоянные матрицы третьего порядка, $P^{(0)}$ имеет каноническую форму и X — матрица фундаментальной системы решений.

Пользуясь методом, аналогичным методу В. В. Хорошилова ([1]), можно построить решения системы (1) в виде рядов, равномерно сходящихся в промежутке $t\geqslant t_0$.

При исследовании системы (1) будем рассматривать следующие случаи: 1°. $P^{(0)}=[a,\ a,\ b]$ $(a\neq b)$. 2°. $P^{(0)}=[a+\beta i,\ \ a-\beta i,\ \ b]$ $(\beta\neq 0)$. 3°. $P^{(0)}=[J_2(a),\ b]$ $(a\neq b)$. 4°. $P^{(0)}=[J_2(a),\ a]$. 5°. $P^{(0)}=[J_3(a)]$ (a, b и β — вещественные числа).

Получаем:

1°. Вид решения системы (1) зависит от канонической структуры матрицы $K=\begin{Vmatrix} p_{11}^{(1)} & p_{12}^{(1)} \\ p_{21}^{(1)} & p_{22}^{(1)} \end{Vmatrix}$ $(p_{kl}^{(m)}=\{P^{(m)}\}_{kl}$ — элемент матрицы $P^{(m)})$.

Если $K=S\begin{Vmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{Vmatrix}S^{-1}$, имеем фундаментальную систему решений

$$x_{11}=e^{at}t^{\mu_1}(1+\varphi_{11}(t)),\quad x_{12}=e^{at}t^{\mu_1}(s_{12}+\varphi_{12}(t)),\quad x_{13}=e^{at}t^{\mu_1}\varphi_{13}(t),$$
$$x_{21}=e^{at}t^{\mu_2}(s_{21}+\varphi_{21}(t)),\quad x_{22}=e^{at}t^{\mu_2}(1+\varphi_{22}(t)),\quad x_{23}=e^{at}t^{\mu_2}\varphi_{23}(t),$$
$$x_{31}=e^{bt}t^{p_{33}^{(1)}}\varphi_{31}(t),\quad x_{32}=e^{bt}t^{p_{33}^{(1)}}\varphi_{32}(t),\quad x_{33}=e^{bt}t^{p_{33}^{(1)}}(1+\varphi_{33}(t)),$$

где x_{k1}, x_{k2}, x_{k3} — k-е решение. Здесь и впредь $\varphi_{kl}(t)$ обозначают равномерно сходящиеся ряды в $[t_0,\ \infty]$ и $\varphi_{kl}(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

Если $K=S\begin{Vmatrix} p & 0 \\ 1 & p \end{Vmatrix}S^{-1}$, то решения системы (1) получим в виде

$$x_{11}=e^{at}t^{p}(-s_{21}-\ln t+\varphi_{11}(t)),\quad x_{12}=e^{at}t^{p}(-1-s_{12}\ln t+\varphi_{12}(t)),$$
$$x_{13}=e^{at}t^{p}\varphi_{13}(t),$$
$$x_{21}=e^{at}t^{p}(1+\varphi_{21}(t)),\quad x_{22}=e^{at}t^{p}(s_{12}+\varphi_{22}(t)),\quad x_{23}=e^{at}t^{p}\varphi_{23}(t),$$

* Так же можно рассматривать и случай комплексных постоянных матриц $P^{(m)}$.

$$x_{31}=e^{bt}t^{p_{33}^{(1)}}\varphi_{31}(t),\quad x_{32}=e^{bt}t^{p_{33}^{(1)}}\varphi_{32}(t),\quad x_{33}=e^{bt}t^{p_{33}^{(1)}}(1+\varphi_{33}(t)).$$

2°. $$x_{11}=e^{(a+\beta i)t}t^{p_{11}^{(1)}}(1+\varphi_{11}(t)),\quad x_{12}=e^{(a+\beta i)t}t^{p_{11}^{(1)}}\varphi_{12}(t),$$

$$x_{13}=e^{(a+\beta i)t}t^{p_{11}^{(1)}}\varphi_{13}(t),$$

$$x_{21}=e^{(a-\beta i)t}t^{p_{22}^{(1)}+1}\varphi_{21}(t),\quad x_{22}=e^{(a-\beta i)t}t^{p_{22}^{(1)}}(1+\varphi_{22}(t)),$$

$$x_{23}=e^{(a-\beta i)t}t^{p_{22}^{(1)}}\varphi_{23}(t),$$

$$x_{31}=e^{bt}t^{p_{33}^{(1)}+1}\varphi_{31}(t),\quad x_{32}=e^{bt}t^{p_{33}^{(1)}+1}\varphi_{32}(t),\quad x_{33}=e^{bt}t^{p_{33}^{(1)}}(1+\varphi_{33}(t)).$$

3°. Если $p_{12}^{(1)}\neq 0$, то

$$x_{11}=e^{at+2\sqrt{p_{12}^{(1)}t}}t^{\frac{p_{11}^{(1)}+p_{22}^{(1)}+1/2}{2}}(1+\varphi_{11}(t)),\quad x_{12}=e^{at+2\sqrt{p_{12}^{(1)}t}}t^{\frac{p_{11}^{(1)}+p_{22}^{(1)}+1/2}{2}}\varphi_{12}(t),$$

$$x_{13}=e^{at+2\sqrt{p_{12}^{(1)}t}}t^{\frac{p_{11}^{(1)}+p_{22}^{(1)}-1/2}{2}}\varphi_{13}(t),$$

$$x_{21}=e^{at-2\sqrt{p_{12}^{(1)}t}}t^{\frac{p_{11}^{(1)}+p_{22}^{(1)}+3/2}{2}}\varphi_{21}(t),\quad x_{22}=e^{at-2\sqrt{p_{12}^{(1)}t}}t^{\frac{p_{11}^{(1)}+p_{22}^{(1)}-1/2}{2}}(c+\varphi_{22}(t)),$$

$$x_{23}=e^{at-2\sqrt{p_{12}^{(1)}t}}t^{\frac{p_{11}^{(1)}+p_{22}^{(1)}-1/2}{2}}\varphi_{23}(t),$$

$$x_{31}=e^{bt}t^{p_{33}^{(1)}}\varphi_{31}(t),\quad x_{32}=e^{bt}t^{p_{33}^{(1)}}\varphi_{32}(t),\quad x_{33}=e^{bt}t^{p_{33}^{(1)}}(1+\varphi_{33}(t)).$$

Если же $p_{12}^{(1)}=0$, то система решений зависит от канонической структуры матрицы

$$K=\begin{Vmatrix} p_{11}^{(2)}-1 & p_{12}^{(2)}-\dfrac{p_{13}^{(1)}p_{32}^{(1)}}{b-a} \\ 1 & p_{22}^{(1)} \end{Vmatrix}.$$

В случае, когда $K=S[\mu_1,\ \mu_2]S^{-1}$, имеем

$$x_{11}=e^{at}t^{\mu_1+1}(1+\varphi_{11}(t)),\quad x_{12}=e^{at}t^{\mu_1+1}\varphi_{12}(t),\quad x_{13}=e^{at}t^{\mu_1+1}\varphi_{13}(t),$$

$$x_{21}=e^{at}t^{\mu_2+2}\varphi_{21}(t),\quad x_{22}=e^{at}t^{\mu_2}(1+\varphi_{22}(t)),\quad x_{23}=e^{at}t^{\mu_2+1}\varphi_{23}(t),$$

$$x_{31}=e^{bt}t^{p_{33}^{(1)}+1}\varphi_{31}(t),\quad x_{32}=e^{bt}t^{p_{33}^{(1)}}\varphi_{32}(t),\quad x_{33}=e^{at}t^{p_{33}^{(1)}}(1+\varphi_{33}(t)).$$

Если $K=S\begin{Vmatrix}\mu & 0\\ 1 & \mu\end{Vmatrix}S^{-1}$, то

$$x_{11}=e^{at}t^{\mu}(-t\ln t+t\varphi_{11}(t)),\quad x_{12}=e^{at}t^{\mu}(-s_{12}\ln t-1+\varphi_{12}(t)),$$

$$x_{13}=e^{at}t^{\mu}\left(\frac{p_{13}^{(1)}}{b-a}\ln t+\varphi_{13}(t)\right),$$

$$x_{21}=e^{at}t^{\mu+1}(1+\varphi_{21}(t)),\quad x_{22}=e^{at}t^{\mu+1}\varphi_{22}(t),\quad x_{23}=e^{at}t^{\mu+1}\varphi_{23}(t),$$

$$x_{31}=e^{bt}t^{p_{33}^{(1)}+1}\varphi_{31}(t),\quad x_{32}=e^{bt}t^{p_{33}^{(1)}}\varphi_{32}(t),\quad x_{33}=e^{bt}t^{p_{33}^{(1)}}(1+\varphi_{33}(t)).$$

4°. $p_{12}^{(1)}\neq 0$. Обозначим

$$\rho_1=\rho_2=p_{11}^{(1)}+p_{22}^{(1)}-\frac{1}{2}+\frac{p_{13}^{(1)}p_{32}^{(1)}}{p_{12}^{(1)}},\quad \rho_3=2p_{33}^{(1)}-2\frac{p_{13}^{(1)}p_{32}^{(1)}}{p_{12}^{(1)}}.$$

$$x_{11}=e^{at+2\sqrt{p_{12}^{(1)}t}}t^{\frac{\rho_1+1}{2}}(c_1+\varphi_{11}(t)),\quad x_{12}=e^{at+2\sqrt{p_{12}^{(1)}t}}t^{\frac{\rho_1+1}{2}}\varphi_{12}(t),$$

$$x_{13}=e^{at+2\sqrt{p_{12}^{(1)}t}}\,t^{\frac{\rho_1+1}{2}}\varphi_{13}(t),$$

$$x_{21}=e^{at-2\sqrt{p_{12}^{(1)}t}}\,t^{\frac{\rho_2+2}{2}}\varphi_{21}(t),\quad x_{22}=e^{at-2\sqrt{p_{12}^{(1)}t}}\,t^{\frac{\rho_2}{2}}(c_2+\varphi_{22}(t)),$$

$$x_{23}=e^{at-2\sqrt{p_{12}^{(1)}t}}\,t^{\frac{\rho_2+1}{2}}\varphi_{23}(t),$$

$$x_{31}=e^{at}t^{\frac{\rho_3+2}{2}}\varphi_{31}(t),\quad x_{32}=e^{at}t^{\frac{\rho_3+1}{2}}\varphi_{32}(t),\quad x_{33}=e^{at}t^{\frac{\rho_3}{2}}(c_3+\varphi_{33}(t)).$$

Пусть $p_{12}^{(1)}=0$. Если, кроме того, $p_{13}^{(1)}=0$ или $p_{32}^{(1)}=0$, то с помощью преобразования $X=X_1e^{[\ln t,\,0,\,0]}$ или $X=X_1e^{[0,\,-\ln t,\,0]}$ получим систему с регулярной особой точкой $t=\infty$. При условии $p_{13}^{(1)}p_{32}^{(1)}\neq 0$

$$x_{11}=e^{at+s_1\frac{\sqrt[3]{t}}{2}}\,t^{\frac{q_{11}^{(1)}+7}{6}}\varphi_{11}(t),\quad x_{12}=e^{at+s_1\frac{\sqrt[3]{t}}{2}}\,t^{\frac{q_{11}^{(1)}+3}{2}}\varphi_{12}(t),$$

$$x_{13}=e^{at+s_1\frac{\sqrt[3]{t}}{2}}\,t^{\frac{q_{11}^{(1)}+4}{6}}\,2p_{13}^{(1)}(1+\varphi_{13}(t)),$$

$$x_{21}=e^{at+s_2\frac{\sqrt[3]{t}}{2}}\,t^{\frac{q_{22}^{(1)}+5}{6}}(1+\varphi_{21}(t)),\quad x_{22}=e^{at+s_2\frac{\sqrt[3]{t}}{2}}\,t^{\frac{q_{22}^{(1)}+2}{6}}\varphi_{22}(t),$$

$$x_{23}=e^{at+s_2\frac{\sqrt[3]{t}}{2}}\,t^{\frac{q_{22}^{(1)}+1}{6}}\varphi_{23}(t),$$

$$x_{31}=e^{at+s_3\frac{\sqrt[3]{t}}{2}}\,t^{\frac{q_{33}^{(1)}+5}{6}}\varphi_{31}(t),\quad x_{32}=e^{at+s_3\frac{\sqrt[3]{t}}{2}}\,t^{\frac{q_{33}^{(1)}}{6}}\left(\frac{1}{2}+\varphi_{32}(t)\right),$$

$$x_{33}=e^{at+s_3\frac{\sqrt[3]{t}}{2}}\,t^{\frac{q_{33}^{(1)}+3}{6}}\varphi_{33}(t).$$

Здесь обозначено

$$s_1=3\sqrt[3]{8p_{13}^{(1)}p_{32}^{(1)}}\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad s_2=3\sqrt[3]{8p_{13}^{(1)}p_{32}^{(1)}}\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\quad s_3=3\sqrt[3]{8p_{13}^{(1)}p_{32}^{(1)}},$$

$$q_{11}^{(1)}=2\sigma(P^{(1)})-4,\quad q_{22}^{(1)}=2\sigma(P^{(1)})-3,\quad q_{33}^{(1)}=2\sigma(P^{(1)})-2\,^*.$$

5°. Пусть $p_{13}^{(1)}\neq 0$. Обозначим: $r_{11}^{(0)}=(p_{12}^{(1)}+p_{23}^{(1)})\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{p_{13}^{(1)}}}$,

$$r_{22}^{(0)}=(p_{12}^{(1)}+p_{23}^{(1)})\frac{-1-i\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{p_{13}^{(1)}}},\quad r_{33}^{(0)}=(p_{12}^{(1)}+p_{23}^{(1)})\frac{1}{\sqrt[3]{p_{13}^{(1)}}};$$

$$3\rho_1=\sigma(P^{(1)})+1,\quad 3\rho_2=\sigma(P^{(1)}),\quad 3\rho_3=\sigma(P^{(1)})-1;$$

$$s_1=3\sqrt[3]{p_{13}^{(1)}}\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad s_2=3\sqrt[3]{p_{13}^{(1)}}\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\quad s_3=3\sqrt[3]{p_{13}^{(1)}}.$$

Решение системы (1) имеем в виде:

$$x_{11}=e^{at+\frac{s_1}{2}\sqrt[3]{t^2}+r_{11}^{(0)}\sqrt[3]{t}}\,t^{\rho_1}(1+\varphi_{11}(t)),\quad x_{12}=e^{at+\frac{s_1}{2}\sqrt[3]{t^2}+r_{11}^{(0)}\sqrt[3]{t}}\,t^{\rho_1}\varphi_{12}(t),$$

$$x_{13}=e^{at+\frac{s_1}{2}\sqrt[3]{t^2}+r_{11}^{(0)}\sqrt[3]{t}}\,t^{\rho_1-\frac{1}{3}}\varphi_{13}(t),$$

$$x_{21}=e^{at+\frac{s_2}{2}\sqrt[3]{t^2}+r_{22}^{(0)}\sqrt[3]{t}}\,t^{\rho_2+\frac{2}{3}}\varphi_{21}(t),\quad x_{22}=e^{at+\frac{s_2}{2}\sqrt[3]{t^2}+r_{22}^{(0)}\sqrt[3]{t}}\,t^{\rho_2}(1+\varphi_{22}(t)),$$

* $\sigma(Z)$ обозначает сумму диагональных членов матрицы Z.

$$x_{23}=e^{at+\frac{s_2}{2}\sqrt[3]{t^2}+r_{22}^{(0)}\sqrt[3]{t}}\,t^{\rho_2}\varphi_{23}(t),$$

$$x_{31}=e^{at+\frac{s_3}{2}\sqrt[3]{t^2}+r_{33}^{(0)}\sqrt[3]{t}}\,t^{\rho_3+1}\varphi_{31}(t),\quad x_{32}=e^{at+\frac{s_3}{2}\sqrt[3]{t^2}+r_{33}^{(0)}\sqrt[3]{t}}\,t^{\rho_3+\frac{2}{3}}\varphi_{32}(t),$$

$$x_{33}=e^{at+\frac{s_3}{2}\sqrt[3]{t^2}+r_{33}^{(0)}\sqrt[3]{t}}\,t^{\rho_3}(1+\varphi_{33}(t)).$$

Пусть $p_{13}^{(1)}=0$.

а) $p_{12}^{(1)}+p_{23}^{(1)}=0$, $\bar{p}_{13}^{(1)}=p_{23}^{(1)}(p_{33}^{(1)}-p_{11}^{(1)}+1)+p_{13}^{(2)}=0$. С помощью некоторого преобразования система (1) заменяется системой с регулярной особой точкой $t=\infty$.

б) $p_{12}^{(1)}+p_{23}^{(1)}=0$, $\bar{p}_{13}^{(1)}\neq 0$. Обозначим

$$s_1=3\sqrt[3]{4\bar{p}_{13}^{(1)}}\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad s_2=3\sqrt[3]{4\bar{p}_{13}^{(1)}}\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\quad s_3=3\sqrt[3]{4\bar{p}_{13}^{(1)}},$$

$$q_{11}^{(1)}=2\sigma(P^{(1)})-2,\quad q_{22}^{(1)}=2\sigma(P^{(1)})-1,\quad q_{33}^{(1)}=2\sigma(P^{(1)}),\ \text{тогда}$$

$$x_{11}=e^{at+s_1\frac{\sqrt[3]{t}}{2}}\,t^{\frac{q_{11}^{(1)}+4}{6}}\varphi_{11}(t),\quad x_{12}=e^{at+s_1\frac{\sqrt[3]{t}}{2}}\,t^{\frac{q_{11}^{(1)}+3}{6}}\varphi_{12}(t),$$

$$x_{13}=e^{at+s_1\frac{\sqrt[3]{t}}{2}}\,t^{\frac{q_{11}^{(1)}-2}{6}}(c_1+\varphi_{13}(t)),$$

$$x_{21}=e^{at+s_2\frac{\sqrt[3]{t}}{2}}\,t^{\frac{q_{22}^{(1)}+5}{6}}(c_2+\varphi_{21}(t)),\quad x_{22}=e^{at+s_2\frac{\sqrt[3]{t}}{2}}\,t^{\frac{q_{22}^{(1)}+2}{6}}\varphi_{22}(t),$$

$$x_{23}=e^{at+s_2\frac{\sqrt[3]{t}}{2}}\,t^{\frac{q_{22}^{(1)}}{6}}\varphi_{23}(t),$$

$$x_{31}=e^{at+s_3\frac{\sqrt[3]{t}}{2}}\,t^{\frac{q_{33}^{(1)}+5}{6}}\varphi_{31}(t),\quad x_{32}=e^{at+s_3\frac{\sqrt[3]{t}}{2}}\,t^{\frac{q_{33}^{(1)}}{6}}(c_3+\varphi_{32}(t)),$$

$$x_{33}=e^{at+s_3\frac{\sqrt[3]{t}}{2}}\,t^{\frac{q_{33}^{(1)}-1}{6}}\varphi_{33}(t).$$

в) $\bar{p}_{12}^{(1)}=p_{12}^{(1)}+p_{23}^{(1)}\neq 0$. Обозначим: $\rho_1=\rho_2=p_{11}^{(1)}+p_{12}^{(1)}-\frac{1}{2}+$ $+\frac{p_{13}^{(2)}+p_{23}^{(1)}(p_{33}^{(1)}-p_{11}^{(1)}+1)}{p_{12}^{(1)}+p_{23}^{(1)}}+\rho_3=2p_{33}^{(1)}+2-2\,\frac{p_{13}^{(2)}+p_{23}^{(1)}(p_{33}^{(1)}-p_{11}^{(1)}+1)}{p_{12}^{(1)}+p_{23}^{(1)}}$,

$$x_{11}=e^{at+2\sqrt{\bar{p}_{12}^{(1)}t}}\,t^{\frac{\rho_1+1}{2}}(c_1+\varphi_{11}(t)),\quad x_{12}=e^{at+2\sqrt{\bar{p}_{12}^{(1)}t}}\,t^{\frac{\rho_1+1}{2}}\varphi_{12}(t),$$

$$x_{13}=e^{at+2\sqrt{\bar{p}_{12}^{(1)}t}}\,t^{\frac{\rho_1}{2}}\varphi_{13}(t),$$

$$x_{21}=e^{at-2\sqrt{\bar{p}_{12}^{(1)}t}}\,t^{\frac{\rho_2+2}{2}}\varphi_{21}(t),\quad x_{22}=e^{at-2\sqrt{\bar{p}_{12}^{(1)}t}}\,t^{\frac{\rho_2}{2}}(c_2+\varphi_{22}(t)),$$

$$x_{23}=e^{at-2\sqrt{\bar{p}_{12}^{(1)}t}}\,t^{\frac{\rho_2}{2}}\varphi_{23}(t),$$

$$x_{31}=e^{at}t^{\frac{\rho_3+2}{2}}\varphi_{31}(t),\quad x_{32}=e^{at}t^{\frac{\rho_3+1}{2}}\varphi_{32}(t),\quad x_{33}=e^{at}t^{\frac{\rho_3+1}{2}}(c_3+\varphi_{33}(t)).$$

Во всех случаях порядок малости $\varphi_{kl}(t)$ при $t\to\infty$ легко детализировать.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
25 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Хорошилов, Прикладн. матем. и мех., 15, в. 1 (1951).