Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 4

МАТЕМАТИКА

В. А. РОХЛИН

ОБ ОДНОМ ОТОБРАЖЕНИИ $(n+3)$-МЕРНОЙ СФЕРЫ В n-МЕРНУЮ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 17 VII 1951)

1. Формулировка результата. Условимся обозначать через $\pi_r(S^n)$ r-мерную гомотопическую группу n-мерной сферы S^n, через f_2 — гопфовское отображение сферы S^3 в сферу S^2 (1) и через E — операцию Фройденталя (2). Положим

$$f_n = E^{n-2} f_2, \quad g_2 = f_2 f_3, \quad h_2 = f_2 f_3 f_4,$$

$$g_n = E^{n-2} g_2 \, (= f_n f_{n+1}), \quad h_n = E^{n-2} h_2 \, (= f_n f_{n+1} f_{n+2}) \quad (n \geqslant 3)$$

и будем обозначать гомотопический класс отображения так же, как само отображение. Известно, что $\pi_3(S^2)$ есть свободная циклическая группа с образующей h_2 (3) и что $\pi_{n+1}(S^n)$ при $n \geqslant 3$ и $\pi_{n+2}(S^n)$ при $n \geqslant 2$ суть циклические группы второго порядка с образующими f_n и g_n (4,2,5). Известно, далее, что $\pi_5(S^2)$ есть циклическая группа второго порядка с образующей h_2 (5,3); но группы $\pi_{n+3}(S^n)$ с $n \geqslant 3$ полностью не вычислены. Наоборот, поведение гомоморфизма E полностью изучено на группах $\pi_{n+3}(S^n)$ с $n \geqslant 3$ (6,7,2), но неизвестно на группе $\pi_5(S^2)$. В этой заметке будет показано, что *при $n \geqslant 3$ отображение h_n гомотопически тривиально, так что $E\pi_5(S^2) = 0$.*

Заметим, что каждое из равенств $h_n = 0$ $(n \geqslant 3)$ имеет своим следствием все остальные; действительно, так как на группе $\pi_6(S^3)$ и на группах $\pi_{n+3}(S^n)$ с $n \geqslant 5$ гомоморфизм E взаимно однозначен (6,2), а в группе $\pi_7(S^4)$ его ядро пересекается с подгруппой $E\pi_6(S^3)$ только по нулю (7), то E^{n-3} есть изоморфизм группы $\pi_6(S^3)$ в группу $\pi_{n+3}(S^n)$ $(n \geqslant 4)$. Пользуясь этим, мы будем доказывать равенство $h_n = 0$ только для больших значений n.

2. Построение отображений по Понтрягину. Все рассматриваемые в дальнейшем многообразия и подмногообразия являются гладкими и компактными (замкнутыми или с краем). Пусть $M^k, k = r - n$, — связное или несвязное замкнутое k-мерное подмногообразие r-мерного эвклидова пространства R^r, дополненного несобственной точкой до сферы S^r, и пусть в каждой точке $a \in M^k$ определена система $F_n(a)$ нормированных векторов $v_1(a), \ldots, v_n(a)$, ортогональных к M^k и между собой и непрерывно зависящих от a. Реперное поле $(F_n \mid M^k)$ следующим образом определяет отображение сферы S^r в сферу S^n: окрестность U^r многообразия M^k естественно распадается в произведение многообразия M^k на n-мерный элемент V^n, так что для $x \in U^r$ мы имеем

$x=\{a(x),\ \eta(x)\}$, где $a(x)\in M^k$, $\eta(x)\in V^n$; мы замыкаем элемент V^n точкой q в сферу S^n и полагаем $f(x)=\eta(x)$, если $x\in U^r$, и $f(x)=q$, если $x\in S^r-U^r$. Подобное же построение может быть проведено в случае, если M^k есть многообразие, лежащее в полупространстве R_1^r пространства R^r и имеющее на границе R^{r-1} этого полупространства край M^{k-1}, при условии, что часть F_n^0 поля F_n, индуцируемая им на M^{k-1}, лежит в R^{r-1}. Мы получаем отображение r-мерного элемента в S^n, совпадающее на границе S^{r-1} этого элемента с отображением, порожденным реперным полем $(F_n^0\,|\,M^{k-1})$. Это поле мы называем краем поля $(F_n\,|\,M^k)$.

3. Реперное поле отображения h_n. Пусть $e_1,\dots,e_{n+3}$ — ортонормированный базис пространства R^{n+3} $(n\geqslant 2)$; R_0^4 — подпространство пространства R^{n+3} с базисом e_1, e_2, e_3, e_4 и координатами x_1, x_2, x_3, x_4; T_0^2 — двумерный тор, обычным образом расположенный в трехмерном подпространстве $x_4=0$ пространства R_0^4:

$$x_1=(4+2\cos\alpha_2)\cos\alpha_1,\quad x_2=(4+2\cos\alpha_2)\sin\alpha_1,$$
$$x_3=\sin\alpha_2\quad (0\leqslant\alpha_1,\quad \alpha_2<2\pi),$$

и T_0^3 — трехмерный тор, представляющий собой границу единичной окрестности тора T_0^2 в R_0^4:

$$x_1=[4+(2+\cos\alpha_3)\cos\alpha_2]\cos\alpha_1,\quad x_2=[4+(2+\cos\alpha_3)\cos\alpha_2]\sin\alpha_1,$$
$$x_3=(2+\cos\alpha_3)\sin\alpha_2,\quad x_4=\sin\alpha_3\quad (0\leqslant\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3<2\pi).$$

Обозначим через $n(a)$ единичную внешнюю нормаль к T_0^3 в R_0^4, взятую в точке $a=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\in T_0^3$, и положим

$$u_1(a)=n(a)\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-e_5\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3),$$
$$u_2(a)=n(a)\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+e_5\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3),$$
$$u_3=e_6,\dots,u_n=e_{n+3};\quad H_n^0(a)=\{u_1(a),\dots,u_n(a)\}.$$

Нетрудно проверить, что отображение сферы S^{n+3} в сферу S^n, определенное реперным полем $(H_n^0\,|\,T_0^3)$, принадлежит к классу h_n.

Будем теперь рассматривать R^{n+3} как границу полупространства R_1^{n+4}. По n°2 равенство $h_n=0$ будет доказано, если мы найдем в R_1^{n+4} реперное поле $(H_n\,|\,M^4)$ с краем $(H_n^0\,|\,T_0^3)$.

Простейшее многообразие с краем T_0^3 есть произведение двумерного тора на двумерный элемент. Такое многообразие не годится в качестве M^4, так как поле H_n^0 на него непродолжаемо: его осевой двумерный тор всегда служит для H_n^0 циклом особенностей в смысле [8,9].

4. Построение многообразия M^4. Пусть R^4 — евклидово пространство; T^2, T^3 — торы, расположенные в R^4 так же, как торы T_0^2, T_0^3 расположены в R_0^4, и ζ_1, ζ_2, ζ_3 — окружности на T^3, определяемые, соответственно, уравнениями $\alpha_2=\alpha_3=0$, $\alpha_3=\alpha_1=0$, $\alpha_1=\alpha_2=0$.

Замкнем R^4 несобственной точкой в сферу S^4 и обозначим, соответственно, через K^4 и E^4 части сферы S^4, внешнюю и внутреннюю к T^3. E^4 есть произведение двумерного тора на двумерный элемент с осевым тором T^2. Сдвинем окружность ζ_3 с T^3 внутрь K^4, вырежем ее окрестность, представляющую собой произведение окружности на трехмерный элемент, и гладко вклеим вместо этой окрестности произведение двумерной сферы на двумерный элемент. Такое вклеивание можно произвести двумя гомотопически различными способами; при одном способе S^4 превращается в прямое произведение P^4 двух двумерных сфер, при втором — в их косое произведение. Мы выберем первый способ и обозначим через L^4 часть многообразия P^4, в которую превратится при этом K^4. Возьмем внутри L^4 двумерную сферу Σ^2, гомологичную лежащему в T^3 двумерному тору $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, вырежем окрестность сферы Σ^2, представляющую собой произведение двумерной сферы на двумерный элемент, и приклеим ее снова, но гомотопически другим способом. Тогда P^4 превратится в некоторое многообразие Q^4, а L^4 — в нужное нам многообразие M^4 с краем T^3.

Многообразия M^4 и Q^4 обладают следующими свойствами, которые одни только и существенны для дальнейшего.

а) При любом гладком приклеивании к M^4 произведения двумерного тора на двумерный элемент осевой двумерный тор этого произведения становится характеристическим циклом ([8,9]); в частности, T^2 есть двумерный характеристический цикл многообразия Q^4;

б) понтрягинское характеристическое число X_{22} ([10,11]) многообразия Q^4 равно нулю.

5. Построение поля $(H_n | M^4)$. Конкретное построение в R_1^{n+4} поля $(H_n | M^4)$ с краем $(H_n^0 | T_0^3)$ было бы затруднительно, и мы ограничимся доказательством существования. При большом n во всяком случае существует вложение многообразия Q^4 в R^{n+4}, при котором M^4 попадает в R_1^{n+4}, тор $T^3 \subset Q^4$ тождественно (по значениям координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) налагается на тор T_0^3 и n-мерная плоскость, нормальная к Q^4 в точках тора T_0^3, попадает в R^{n+3}. Из того, что T^2 есть двумерный характеристический цикл многообразия Q^4, следует, что на M^4 существует некоторое реперное поле $(G_n | M^4)$. Изменив, если нужно, знак одного из его векторов, мы сделаем его край $(G_n^0 | T_n^0)$ ориентированным так же, как поле $(H_n^0 | T_0^3)$, и, сравнивая $(G_n^0 | T_0^3)$ с $(H_n^0 | T_0^3)$, получим некоторое отображение φ тора T_0^3 в многообразие Γ_n собственных вращений n-мерного евклидова пространства. Оба поля G_n^0 и H_n^0 непродолжаемы на E^4, и для обоих тор T^2 служит циклом особенностей (см. п°3 и п°4, а)). Так как фундаментальная группа многообразия Γ_n состоит из двух элементов, то отсюда следует, что на окружности ζ_3 отображение φ гомотопически тривиально. Вырезав E^4 и гладко приклеив к M^4 вместо E^4 произведение двумерного тора на двумерный элемент так, чтобы гомологичной нулю в этом произведении стала окружность ζ_1 или ζ_2, мы увидим подобным же образом, что отображение φ гомотопически тривиально и на этих окружностях. Далее, оно гомологически тривиально в размерности 3; это — следствие равенства $X_{22}(Q^4) = 0$ (см. п°4, б). Но всякое отображение трехмерного тора в Γ_n, гомологически тривиальное в размерностях 1 и 3, гомотопически тривиально. Поэтому отображение φ гомотопически тривиально, и поле $(G_n^0 | T_0^3)$ можно продеформировать в поле $(H_n^0 | T_0^3)$. Продолжая эту деформацию в деформацию поля $(G_n | M^4)$, мы и получим нужное нам реперное поле $(H_n | M^4)$ с краем $(H_n^0 | T_0^3)$.

Поступило
2 VII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Hopf, Math. Ann., 104, 639 (1931). [2] H. Freudenthal, Comp. Math., 5, 299 (1937). [3] W. Hurewicz, Proc. Kon. Akad. Amsterdam, 38, 112 (1935). [4] Л. С. Понтрягин, ДАН, 19, 147 (1938). [5] Л. С. Понтрягин, ДАН, 70, 957 (1950). [6] W. Hurewicz and N. E. Steenrod, Proc. Nat. Acad. USA, 27, 60 (1941). [7] G. W. Whitehead, Ann. of Math., 51, 192 (1950). [8] E. Stiefel, Comment. Math. Helv., 8, 305 (1936). [9] H. Whitney, Lectures in Topology, 1941, 101. [10] Л. С. Понтрягин, Матем. сборн., 21, 233 (1947). [11] Л. С. Понтрягин, там же, 24, 129 (1949).