Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. А. ДАВЫДОВ

ОБОБЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ О СХОДИМОСТИ СТЕПЕННЫХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 28 VII 1951)

1. Справедливы следующие предложения.

Теорема 1. *Для того чтобы ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi^{\lambda_k}, \tag{1}$$

где $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |a_k| < \infty$, $\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} > \lambda > 1$, *сходился в точке* $\xi \in \Gamma(|z|=1)$, *необходимо и достаточно, чтобы сумма ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{\lambda_k} \quad (|z|<1) \tag{2}$$

имела предельное значение, когда точка $z\to\xi$ *по какому-нибудь некасательному к окружности* $\Gamma(|z|=1)$ *пути, причем из равномерного стремления по некасательным путям суммы ряда* (2) *на множестве* $E\subseteq\Gamma$ *следует равномерная сходимость ряда* (1) *на этом множестве, и обратно.*

Теорема 2. *Каков бы ни был ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi^k, \tag{3}$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0,$$

всегда можно так изменить аргументы его коэффициентов a_k *(при неизменных модулях), что последовательность его частичных сумм для почти всех* $\xi \in \Gamma(|z|=1)$ *будет всюду плотна во всей комплексной плоскости.*

Теорема 3. *Никакими изменениями аргументов коэффициентов ряда* (2) *(при неизменных модулях), где* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$, $\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} > \lambda > 3$, *сходящегося внутри единичного круга* $K(|z|<1)$, *нельзя добиться того, чтобы его сумма стала ограниченной в окрестности хотя бы одной точки окружности* $\Gamma(|z|=1)$.

Под окрестностью точки $\xi \in \Gamma(|z|=1)$ мы понимаем общую часть двух кругов: $|z|<1$, $|z-\xi|<\rho$.

Теорема 4. *Для того чтобы ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos\lambda_k x+\beta_k \sin\lambda_k x), \tag{4}$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|\alpha_k|^p+|\beta_k|^p)<\infty, \qquad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^q<c_1\lambda_{n+1}^q$$

(c_1 — постоянное число), $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (p и q — положительные числа), сходился в точке x, необходимо и достаточно, чтобы он в этой точке суммировался методом Пуассона — Абеля по какому-нибудь некасательному пути, причем из равномерной суммируемости методом Пуассона — Абеля по некасательным путям ряда (4) на множестве $E\subseteq[0;\,2\pi]$ следует равномерная сходимость этого ряда на этом множестве E, и обратно. В частности, ряд (4) при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2+\beta_k^2)<\infty, \qquad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2<c_1\lambda_{n+1}^2$$

сходится почти всюду.

Теорема 5. *Если ряд (4), где $\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}>\lambda>3$, является рядом Фурье функции $f(x)$, суммируемой на отрезке $[0;\,2\pi]$ и ограниченной на сколь угодно малом отрезке $[a;\ b]\subset[0;\ 2\pi]$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(|\alpha_k|+|\beta_k|)$ сходится.*

2. Теорема 1 для случая, когда $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=0$, была нами доказана ранее [1]. Теорема 2 дает усиление известной теоремы о том, что при надлежащей расстановке знаков $+$ и $-$ перед коэффициентами ряда (1), в котором $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|^2=\infty$, последний почти всюду на $\Gamma(|z|=1)$ станет расходящимся.

Теорема 4 обобщает теорему А. Н. Колмогорова [2].

Теорема 5 обобщает теорему Szidon'a [2].

3. Теорема 1 является следствием теоремы Гарди — Литлвуда [3] и леммы 1.

Лемма 1. *Пусть*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k z^{\lambda_k},$$

где $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,|a_k|=c<\infty$, $\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}>\lambda>1$. Обозначим $|z_n'|=1-\frac{2}{\lambda_{n+1}}$, $\frac{|1-z_n'|}{1-|z_n'|}<c_1$ (c_1 — постоянное число), $z_n=z_n'\zeta$, $\zeta\in\Gamma(|z|=1)$.

Тогда равномерно относительно $\zeta\in\Gamma$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|f(z_n)-\sum_{k=1}^{n}a_k\zeta^{\lambda_k}\right|\leqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}\,a_k\left(\frac{2c_1}{\lambda-1}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-2\lambda^{k-1}}\right). \tag{5}$$

Примечание. Из леммы 1 следует, в частности, упомянутая выше теорема Гарди — Литлвуда [3] для того случая, когда

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |a_k| = c < \infty \quad \text{и} \quad \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \geqslant \lambda = 7.$$

В самом деле, пусть точка $z=\zeta$ по радиусу. Тогда число c_1 в лемме 1 равно 1 и, следовательно, неравенство (5) для этого случая примет вид

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| f(z_n) - \sum_{k=1}^{n} a_k \zeta^{\lambda_k} \right| \leqslant c\left(\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\cdot 7^{k-1}}\right) = \frac{c}{2} - \beta,$$

где $\beta > 0$. Отсюда следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \alpha$ $(\alpha \neq \infty)$, то $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Но тогда из (5) следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{\lambda_k}$.

Теорема 2 следует из нашей теоремы 2 ([1]), если рассмотреть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \zeta^k) \zeta'^{\lambda_k}$, где $\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} > \lambda > 1$, $\zeta \in \Gamma(|z|=1)$, $\zeta' \in \Gamma'(|z'|=1)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \infty$, для которого последовательность частичных сумм для всех $\zeta \in \Gamma$ и почти всех $\zeta' \in \Gamma'$ всюду плотна во всей комплексной плоскости.

Теорема 3 для случая, когда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \infty$, следует из теоремы А. Зигмунда (([2]) стр. 123) и теоремы А. И. Плеснера (([4]) стр. 299). Если же ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ сходится, то справедливость ее вытекает из леммы 1 и того факта (([2]) стр. 132), что каков бы ни был отрезок $[a;b] \subset [0;2\pi]$, если $\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} > \lambda > 3$, то найдется точка $x^* \in [a';\ b']$ $([a'-\alpha;\ b'+\alpha] \subset [a;\ b],\ \alpha > 0)$ такая, что для достаточно больших k

$$\alpha_k \cos \lambda_k x^* + \beta_k \sin \lambda_k x^* = \rho_k \cos(\lambda_k x^* + x_k) > \varepsilon > 0,$$

где $\alpha_k - i\beta_k = a_k$, $\rho_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$.

Теорема 4 следует из леммы 2.

Лемма 2. *Пусть*

$$f(x, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos \lambda_k \varphi + \beta_k \sin \lambda_k \varphi) x^{\lambda_k},$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p + |\beta_k|^p < \infty$, $\sum\limits_{l=1}^{n} \lambda_l^q < c_1 \lambda_{n+1}^q$ *(c_1 — постоянное число),* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(p и q — положительные числа). Обозначим* $|x_n| = 1 - \frac{1}{\lambda_{n+1}}$, $\frac{|1-x_n|}{1-|x_n|} < c$ *(c — постоянное число).*

Тогда равномерно относительно φ:

$$\lim_{n\to\infty} \left[f(x_n;\ \varphi) - \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos \lambda_k \varphi + \beta_k \sin \lambda_k \varphi) \right] = 0.$$

Теорема 5 вытекает из леммы 1 теоремы (([2]), стр. 58) о том, что если функция $f(x)$ суммируема на отрезке $[0;\ 2\pi]$ и ограниченна на $[a;\ b] \subset$ $\subset [0;\ 2\pi]$, то $f(x, r) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos \lambda_k x + \beta_k \sin \lambda_k x) r^{\lambda_k}$, где α_k и β_k —

коэффициенты Фурье функции $f(x)$, ограничена для всех $x \in [a'; b']$ ($[a'-\alpha; b'+\alpha] \subset [a; b]$, $\alpha > 0$) и всех r ($r_0 < r < 1$), и факта ((2), стр. 132), упомянутого выше.

Калининский государственный
педагогический институт
им. М. И. Калинина

Поступило
6 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. А. Давыдов, ДАН, **65**, № 1 (1949). [2] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939. [3] A. E. Ingham, Quart. Journ. Math., **8**, No. 29 (1937). [4] И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-е, 1950, стр. 299.