Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 4

МАТЕМАТИКА

Ю. Е. ПЕНЗОВ

КЛАССИФИКАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ С ДВУМЯ КОМПОНЕНТАМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 6 VIII 1951)

Как установлено В. В. Вагнером (1), нахождение всех типов геометрических дифференциальных объектов в X_n класса v с N компонентами сводится к нахождению всех $N_{nv}-N$ параметрических* подгрупп просто транзитивной группы Ли $\mathfrak{A}^{(n,v)}$ с N_{nv} параметрами; инфинитезимальные операторы порядка $r\,(r, s, t = 1, 2, \ldots, v)$ группы $\mathfrak{A}^{(n,v)}$ в переменных $\xi^{\alpha}_{\{\alpha_1\ldots\alpha_r\}}$ имеют вид**:

$$A_{\alpha}^{\{\alpha_1\ldots\alpha_r\}} F = \sum_{h=r}^{v} h! \sum_{\{\omega_1\ldots\omega_h\}} \frac{\partial F}{\partial \xi^{\alpha}_{\{\omega_1\ldots\omega_h\}}} \sum_{(i_1+\ldots+i_r=h)} \frac{1}{i_1!\ldots i_r!}\, \xi^{(\alpha_1}_{(\omega_1\ldots\omega_{i_1}} \ldots \xi^{\alpha_r)}_{\omega_{i_1+\ldots+i_{r-1}+1}\ldots\omega_h)} \tag{1}$$

и удовлетворяют тождествам

$$\left(A_{\alpha}^{(v)\{\alpha_1\ldots\alpha_r\}}, A_{\beta}^{(v)\{\beta_1\ldots\beta_s\}}\right) F = \sum_{l=1}^{s} \delta_{\alpha}^{\beta_l} A_{\beta}^{(v)\{\alpha_1\ldots\alpha_2\beta_1\ldots\beta_{l-1}\beta_{l+1}\ldots\beta_s\}} F - \\ - \sum_{m=1}^{r} \delta_{\beta}^{\alpha_m} A_{\alpha}^{(v)\{\beta_1\ldots\beta_s\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}\alpha_{m+1}\ldots\alpha_r\}} F, \tag{2}$$

где все $A_{\gamma}^{(v)\{\gamma_1\ldots\gamma_h\}} F$ надо считать равными нулю, если $h > v$. Каждой подгруппе группы $\mathfrak{A}^{(n,v)}$ соответствует множество подобных между собой градиентных объектов, компоненты каждого из которых определяются с помощью некоторой полной системы инвариантов данной подгруппы, и обратно. При этом класс объекта будет v тогда и только тогда, когда инфинитезимальные операторы соответствующей подгруппы независимы по крайней мере с одним оператором порядка v группы $\mathfrak{A}^{(n,v)}$.

---

* Число $N_{nv} = n\left[\binom{n+v}{n} - 1\right]$.

** Здесь и в дальнейшем фигурные скобки $\{\,\}$ указывают, что заключенные в них индексы принимают только такие числовые значения, которые образуют неубывающую последовательность; все греческие индексы, если противное не оговорено, принимают значения от 1 до n.

Согласно тождествам (2) коммутатор двух любых операторов группы $\mathfrak{A}^{(n,v)}$ порядков r и s линейно выражается через ее операторы порядка $r+s-1$; следовательно, если к инфинитезимальным операторам некоторой подгруппы $\mathfrak{G}$ группы $\mathfrak{A}^{(n,v)}$ добавить все операторы группы $\mathfrak{A}^{(n,v)}$ порядков $t, t+1, \ldots, v$, то указанная совокупность операторов будет определять новую подгруппу $\mathfrak{G}(t-1)$ группы $\mathfrak{A}^{(n,v)}$. Из формул (1) следует, что инвариантами порядка $\leqslant t$ подгруппы $\mathfrak{G}$ являются все инварианты порядка $\leqslant t$ подгруппы $\mathfrak{G}(t)$ и только они. Следовательно, соответствующий подгруппе $\mathfrak{G}(t)$ объект Ω' будет функцией класса $\leqslant t$ объекта Ω, соответствующего подгруппе $\mathfrak{G}$. Отсюда следует, что объект Ω класса v будет простым (непростым и допускать как функцию объект Ω' класса v') тогда и только тогда, когда инфинитезимальные операторы соответствующей ему подгруппы $\mathfrak{G}$ можно привести к такому виду, чтобы для любого $i=1, 2, \ldots$ $\ldots, v-1$ (для $i=v'$) число m_i ее операторов, не содержащих операторы порядка $<i$ и из которых нельзя исключить операторы порядка i группы $\mathfrak{A}^{(n,v)}$, равнялось бы (было бы меньше) $N_{ni}-\sum\limits_{k=1}^{i-1} N_{nk}$, т. е. к виду:

$$A_{\alpha}^{(v)\,\alpha_1} F + \text{линейная комбинация операторов группы } \mathfrak{A}^{(n,v)} \text{ порядка } > 1\ (\geqslant 1); \quad (3_1)$$

. . . .

$$A_{\alpha}^{(v)\,\{\alpha_1\cdots\alpha_{v-1}\}} F + \text{линейная комбинация операторов группы } \mathfrak{A}^{(n,v)} \text{ порядка } > v-1\ (\geqslant v-1); \quad (3_{v-1})$$

$$A_{\alpha}^{(v)\,\{\alpha_1\cdots\alpha_v\}} F + \text{линейная комбинация операторов группы } \mathfrak{A}^{(n,v)} \text{ порядка } v, \quad (3_v)$$

где совокупность индексов $\left(\begin{smallmatrix}\{\alpha_1\cdots\alpha_v\}\\ \alpha\end{smallmatrix}\right)$ принимает некоторые из допустимых значений, а совокупности $\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1\\ \alpha\end{smallmatrix}\right), \ldots, \left(\begin{smallmatrix}\{\alpha_1\cdots\alpha_{v-1}\}\\ \alpha\end{smallmatrix}\right)$ все (совокупность $\left(\begin{smallmatrix}\{\alpha_1\cdots\alpha_{v'}\}\\ \alpha\end{smallmatrix}\right)$ не все) допустимые значения.

Это условие простоты объекта приводит к теореме*:

В X_n при $n \geqslant 2$ всякий геометрический дифференциальный объект класса $v \geqslant 3$ непростой и допускает как функцию объект 2-го класса.

Для доказательства покажем, что при $v \geqslant 3$ группа $\mathfrak{A}^{(n,v)}$ не имеет подгрупп, определяющих объекты класса v, у которых $m_2 = N_{n2} - N_{n1}$. В самом деле, пусть для подгруппы $\mathfrak{G}$ $m_2 = N_{n2} - N_{n1}$, т. е. среди операторов подгруппы $\mathfrak{G}$ имеются все операторы вида (3_2). Составляя их всевозможные коммутаторы, найдем, пользуясь формулами (2), что среди операторов подгруппы $\mathfrak{G}$ имеются все операторы вида (3_3). Коммутируя операторы этой подгруппы вида (3_2) и (3_3), найдем, что среди ее операторов имеются все операторы вида (3_4). Продолжая далее, придем к тому, что все операторы порядка v группы $\mathfrak{A}^{(n,v)}$ принадлежат подгруппе $\mathfrak{G}$. Это доказывает теорему.

Докажем далее, что

В X_n $(n \geqslant 2)$ класс двухкомпонентных геометрических дифференциальных объектов не превышает двух.

В самом деле, если бы в X_n $(n \geqslant 2)$ существовал двухкомпонентный объект Ω класса $\geqslant 3$, то, согласно предыдущей теореме, существовал бы объект класса 2, являющийся функцией Ω и имеющий,

---

* Ср. ([2]); для случая $n=1$ см. также ([3]), стр. 168.

следовательно, только одну компоненту. Но, как известно [4], это невозможно.

Найдем теперь все двухкомпонентные объекты 2-го класса. Согласно [2], простые двухкомпонентные объекты 2-го класса существуют только в X_2 и все они подобны свернутому объекту аффинной связности. Каждый непростой объект в X_n будет, согласно [4], иметь своей функцией при $n \geqslant 3$ скалярную плотность веса 1, а при $n = 2$ либо скалярную плотность веса 1, либо объект K. Следовательно, инфинитезимальные операторы подгрупп группы $\mathfrak{A}^{(n,\,2)}$, которым соответствуют двухкомпонентные объекты 2-го класса, при $n \geqslant 3$ приводимы к виду

$$T_a^b F = A_a^{(2)\,b} F - \delta_a^b A_1^{(2)\,1} F + \lambda_a^b A_R^{(2)\,ST} F;\ T_\alpha^{\{\beta\gamma\}} F = A_\alpha^{(2)\,\{\beta\gamma\}} F + \lambda_\alpha^{\{\beta\gamma\}} A_R^{(2)\,ST} F, \tag{4}$$

а при $n = 2$ либо к виду (4), либо к виду

$$T_a^b F = A_a^{(2)} F + \lambda_a^b A_R^{(2)\,ST} F; \quad T_\alpha^{\{\beta\gamma\}} F = A_\alpha^{(2)\,\{\beta\gamma\}} F + \lambda_\alpha^{\{\beta\gamma\}} A_R^{(2)\,ST} F, \tag{5}$$

где R, S, T имеют определенные числовые значения из $1, 2, \ldots, n$; α, β, γ и a, b принимают всевозможные допустимые значения от 1 до n, лишь бы $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (R, S, T)$ и для операторов (4) $(a, b) \neq (1, 1)$, для операторов (5) $(a, b) \neq (1, 2)$. Для того чтобы совокупность операторов (4) действительно определяла подгруппу группы $\mathfrak{A}^{(n,\,2)}$, необходимо, чтобы коэффициенты $\lambda_\alpha^{\{\beta\gamma\}}$ удовлетворяли уравнениям:

$$\begin{gathered}
\delta_a^\beta \lambda_\alpha^{\{b\gamma\}} + \delta_a^\gamma \lambda_\alpha^{\{b\beta\}} - \delta_\alpha^b \lambda_a^{\{\beta\gamma\}} - \delta_a^b \left(\delta_1^\beta \lambda_\alpha^{\{1\gamma\}} + \delta_1^\gamma \lambda_\alpha^{\{1\beta\}} - \delta_\alpha' \lambda_1^{\{\beta\gamma\}}\right) + \\
+ \lambda_\alpha^{\{\beta\gamma\}} \left[\delta_a^S \lambda_R^{\{bT\}} + \delta_a^T \lambda_R^{\{bS\}} - \delta_R^b \lambda_a^{\{ST\}} - \right. \\
\left. - \delta_a^b \left(\delta_1^S \lambda_R^{\{1T\}} + \delta_1^T \lambda_R^{\{1S\}} - \delta_R' \lambda_1^{\{ST\}}\right)\right] = 0; \quad \lambda_R^{\{ST\}} = -1.
\end{gathered} \tag{6}$$

Но можно убедиться, что уравнения (6) при любых R, S, T противоречивы, что дает теоремы:

В X_n при $n \geqslant 3$ не существует двухкомпонентных геометрических дифференциальных объектов 2-го класса.

В X_2 нет двухкомпонентных геометрических дифференциальных объектов 2-го класса, имеющих своей функцией скалярную плотность.

Находя аналогично уравнения, которым должны удовлетворять коэффициенты λ_a^b и $\lambda_\alpha^{\{\beta\gamma\}}$ операторов (5) для того, чтобы совокупность их действительно определяла подгруппу группы $\mathfrak{A}^{(2,\,2)}$, убедимся, что они имеют решение только при $(R, S, T) = (1, 1, 2)$ и $(R, S, T) = (1, 2, 2)$. После вычислений придем к теореме:

В X_2 все двухкомпонентные геометрические дифференциальные объекты 2-го класса подобны либо свернутому объекту аффинной связности, либо объектам, уравнения преобразования компонент которых имеют вид

$$\begin{gathered}
\Omega_{1'} = (A_{1'}^1 \Omega_1 + A_{1'}^2)(A_{2'}^1 \Omega_1 + A_{2'}^2)^{-1}, \\
\Omega_{2'} = \Delta^{-1} (A_{2'}^1 \Omega_1 + A_{2'}^2)^{-1} \left\{ \Omega_2 - (A_1^{\alpha'} - \Omega_1 A_2^{\alpha'}) \frac{\partial \ln \Delta}{\partial \xi^{\alpha'}} \right\}
\end{gathered} \tag{7}$$

и

$$\begin{gathered}
\Omega_{1'} = (A_{1'}^1 \Omega_1 + A_{1'}^2)(A_{2'}^1 \Omega_1 + A_{2'}^2)^{-1}, \\
\Omega_{2'} = \Delta^{-2} (A_{2'}^\alpha U_\alpha)^{-3} \{\Omega_2 + (A_{1'1'}^\alpha A_{2'2'}^{\beta\gamma} - 2A_{1'2'}^\alpha A_{1'2'}^{\beta\gamma} + A_{2'2'}^\alpha A_{1'1'}^{\beta\gamma}) U_\alpha U_\beta U_\gamma\} \\
(U_1 = \Omega_1; \quad U_2 = 1).
\end{gathered} \tag{8}$$

Перейдем к нахождению двухкомпонентных объектов 1-го класса. Будем представлять инфинитезимальные операторы подгрупп группы $\mathfrak{A}^{(n,1)}$, соответствующих двухкомпонентным объектам, в виде*

$$T_a^b F = A_a^{(1)b} F + \underset{1}{\lambda}{}_a^b A_R^{(1)S} F + \underset{2}{\lambda}{}_a^b A_Q^{(1)T} F. \tag{9}$$

Пользуясь (2), найдем, что совокупность операторов (9) действительно определяет подгруппу группы $\mathfrak{A}^{(n,1)}$ тогда и только тогда, когда коэффициенты $\underset{1}{\lambda}{}_a^b$, $\underset{2}{\lambda}{}_a^b$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{gathered}
\delta_a^d \underset{i}{\lambda}{}_c^b - \delta_c^b \underset{i}{\lambda}{}_a^d + \underset{1}{\lambda}{}_a^b [\delta_R^d \underset{i}{\lambda}{}_c^S - \delta_c^S \underset{i}{\lambda}{}_R^d] + \underset{2}{\lambda}{}_a^b [\delta_Q^d \underset{i}{\lambda}{}_c^T - \delta_c^T \underset{i}{\lambda}{}_Q^d] + \underset{1}{\lambda}{}_c^d [\delta_a^S \underset{i}{\lambda}{}_R^b - \delta_R^b \underset{i}{\lambda}{}_a^S] + \\
+ \underset{2}{\lambda}{}_c^d [\delta_a^T \underset{i}{\lambda}{}_Q^b - \delta_Q^b \underset{i}{\lambda}{}_a^T] + (\underset{1}{\lambda}{}_a^b \underset{2}{\lambda}{}_c^d - \underset{1}{\lambda}{}_c^d \underset{2}{\lambda}{}_a^b) [\delta_R^T \underset{i}{\lambda}{}_Q^S - \delta_Q^S \underset{i}{\lambda}{}_R^T] = 0 \quad (i = 1,\ 2) \qquad (10) \\
\underset{1}{\lambda}{}_R^S = -1; \qquad \underset{1}{\lambda}{}_Q^T = 0; \qquad \underset{2}{\lambda}{}_R^S = 0; \qquad \underset{2}{\lambda}{}_Q^T = -1.
\end{gathered}$$

Рассматривая решения уравнений (10), придем к теореме:

В X_n при $n \geqslant 4$ не существует двухкомпонентных геометрических дифференциальных объектов 1-го класса; все геометрические дифференциальные объекты с двумя компонентами 1-го класса в X_3 подобны либо ко- либо контравариантному объектам K, т. е. объектам, компоненты которых K_a и K^a преобразуются по уравнениям:

$$K_{a'} = (A_{a'}^a K_a + A_{a'}^3)(A_{3'}^a K_a + A_{3'}^3)^{-1}, \tag{11}$$

и

$$K^{a'} = (A_a^{a'} K^a + A_3^{a'})(A_a^{3'} K^a + A_3^{3'})^{-1}; \tag{12}$$

все геометрические дифференциальные объекты с двумя компонентами 1-го класса в X_2 подобны одному из следующих: 1) *ковариантной векторной плотности некоторого веса;* 2) *совокупности двух объектов K;* 3) *объединению скалярной плотности веса* 1 *и объекта K;* 4) *отношению двух компонент ковариантного тензора к его третьей компоненте.*

Таким образом, мы нашли все существенно различные типы геометрических дифференциальных объектов класса v с двумя компонентами в произвольном X_n при $n \geqslant 2$. Для пространства X_1 это было сделано автором раньше.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Поступило 27 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Вагнер, ДАН, **46**, № 9 (1945). [2] В. В. Вагнер, ДАН, **69**, № 3 (1949). [3] Ю. Е. Пензов, Матем. сборн., **26** (68), 2 (1950). [4] Ю. Е. Пензов, ДАН, **54**, № 7 (1946).

* Здесь и в (10) R, S, Q, T имеют определенные значения, равные одному из чисел $1, 2, \ldots, n$, но $(Q, T) \neq (R, S)$; a, b, c, d принимают всевозможные значения от 1 до n, но только такие, что (a, b) и $(c, d) \neq (R, S)$ и (Q, T).