Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 3

МАТЕМАТИКА

М. П. ГАНИН

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 10 VII 1951)

§ 1. Пусть S^+ — конечная $(m+1)$-связная область плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная контуром $L = L_0 + L_1 + \cdots + L_m$. Если при помощи разрезов превратить эту область в односвязную (T), то, как известно [1], функцию $U(x, y)$, которая является регулярным решением n-гармонического уравнения

$$\Delta^n W(x, y) = 0 \tag{1}$$

в области T, можно представить в виде

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{p=0}^{n-1} \overline{z}^p z^p \varphi_p(z),$$

где $\varphi_p(z)$ — аналитические в области T функции, выражающиеся через $U(x, y)$ с точностью до аддитивных мнимых постоянных. Пусть $V(x, y)$ — другое регулярное решение уравнения (1) в области T. Тогда, как и для $U(x, y)$, получаем

$$V(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{n-1} \overline{z}^p z^p \psi_p(z).$$

Если $\operatorname{Im} \varphi_p(z) = \operatorname{Re} \psi_p(z)$ $(p = 0, 1, \ldots, n-1)$, то функции $U(x, y)$, $V(x, y)$ будем называть сопряженными полигармоническими порядка n функциями, а выражение

$$F(z, \overline{z}) = U(x, y) + iV(x, y)$$

назовем полианалитической порядка n функцией.

Легко видеть, что в этом случае

$$F(z, \overline{z}) = \sum_{p=0}^{n-1} \overline{z}^p z^p \varphi_p(z), \tag{2}$$

где $\varphi_p(z)$ $(p = 0, 1, \ldots, n-1)$ — аналитические функции в области T, которые однозначно выражаются через $F(z, \overline{z})$.

Учитывая голоморфность функций $(z^p \varphi_p(z))^{(n)}$ $(p = 0, 1, \ldots, n-1)$ в области S^+ [1], нетрудно получить представление для функции $F(z, \overline{z})$ в области S^+.

Назовем функцию $F(z, \overline{z})$, определяемую равенством (2), полиголоморфной порядка n функцией, если функции $\varphi_p(z)$ $(p = 0, 1, \ldots, n-1)$

голоморфны в области S^+. Очевидно, что в этом случае представление для функции $F(z, \bar{z})$ в многосвязной области S^+ совпадает с представлением (2).

§ 2. Рассмотрим теперь следующие задачи.

Определить полиголоморфную порядка n функцию

$$F(z, \bar{z}) = U(x, y) + iV(x, y)$$

в области S^+ по следующим n условиям на контуре L:

I задача:

$$a_k(s)\,\Delta^k U + b_k(s)\,\Delta^k V = g_k(s) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1); \tag{3}$$

II задача:

$$\begin{gathered} a_k(s)\,\Delta^k U + b_k(s)\,\Delta^k V = g_k(s), \\ a_k^1(s)\frac{\partial \Delta^k U}{\partial n} + b_k^1(s)\frac{\partial \Delta^k V}{\partial n} = g_k^1(s) \end{gathered} \tag{4}$$

($k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$, причем при нечетном n отбрасывается последнее условие);

III задача:

$$a_k(s)\frac{\partial^k U}{\partial n^k} + b_k(s)\frac{\partial^k V}{\partial n^k} = g_k(s) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1); \tag{5}$$

IV задача:

$$a_k(s)\frac{\partial^{n-1} U}{\partial x^{n-k}\,\partial y^{k-1}} + b_k(s)\frac{\partial^{n-1} V}{\partial x^{n-k}\,\partial y^{k-1}} = g_k(s)\,(k = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

где $\partial / \partial n$ — производная по внутренней нормали; $a_k(s)$, $b_k(s)$, $g_k(s)$, $a_k^1(s)$, $b_k^1(s)$, $g_k^1(s)$ — заданные функции точек контура, удовлетворяющие условию Гельдера вместе со своими производными до некоторого порядка, причем $a_k^2 + b_k^2 \neq 0$, $a_k^{1^2} + b_k^{1^2} \neq 0$ всюду на L.

Если область S^+ принадлежит к классу областей, отображающихся на круг или на плоскость с разрезами вдоль прямой при помощи рациональных функций, то условия каждой из этих задач легко приводятся к граничным условиям n задач Гильберта ([2]). Для этих областей решения всех рассматриваемых задач получаются в явном виде.

Для произвольной области S^+ краевые условия I задачи преобразуются в граничные условия n задач Гильберта вида

$$\mathrm{Re}\,[(a_k - ib_k)\,(t^k \varphi_k(t))^{(k)}] = c_k(s) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Решая эти задачи ([3]), найдем функции $\varphi_p(z)$ $(p = 0, 1, \ldots, n-1)$, а по формуле (2) получим решение задачи.

§ 3. Рассмотрим II и III задачи.

Будем предполагать, что координаты $x(s)$, $y(s)$ контура L удовлетворяют условию Гельдера вместе со своими производными порядка $\leqslant 3n + 2$, а функции $a_k(s)$, $b_k(s)$, $g_k(s)$, $a_k^1(s)$, $b_k^1(s)$, $g_k^1(s)$ — вместе со своими производными порядка $\leqslant 3n - k + 2$.

При таких условиях покажем, что решение каждой из этих задач приводится к решению системы интегральных уравнений Фредгольма.

С помощью простых преобразований можно показать, что условия II и III задач эквивалентны одной задаче об отыскании функции $F(z, \bar{z})$ по следующим условиям на контуре L:

$$\frac{\partial^k \overline{F(t, \bar{t})}}{\partial t^k} + \sum_{q=0}^{k} \sum_{l=0}^{k-q} a_{klq}(t) \frac{\partial^{l+q} \overline{F(t, \bar{t})}}{\partial t^l \, \partial t^q} = f_k(t) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{7}$$

где $a_{klq}(t)$, $f_k(t)$ — известные функции точек контура, удовлетворяющие условию Гельдера вместе со своими производными порядка $\leqslant 2n+2$.

Используя представление (2), эти равенства можно записать еще так:

$$\overline{\varphi_\alpha(t)} + \sum_{k=\alpha}^{k-1} \sum_{q=0}^{k} \sum_{l=0}^{k-q} \sum_{p=l}^{n-1} A_{kqlp}^{\alpha}(t) \, (t^p \varphi_p(t))^{(q)} = G_\alpha(t) \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{8}$$

где

$$A_{kqlp}^{\alpha}(t) = (-1)^{k-\alpha} C_k^\alpha \frac{p!}{k! \, (p-l)!} t^{k-\alpha} \bar{t}^{p-l-\alpha} a_{klq}(t),$$

$$G_\alpha(t) = \sum_{k=\alpha}^{n-1} (-1)^{k-\alpha} \frac{1}{k!} C_k^\alpha t^{k-\alpha} \bar{t}^{-\alpha} f_k(t)$$

известные функции, удовлетворяющие условию Гельдера вместе со своими производными порядка $\leqslant 2n+2$.

Чтобы избавиться от производных от функций $\varphi_p(z)$ $(p = 0, 1, \ldots \ldots, n-1)$, воспользуемся одним из методов Н. И. Мусхелишвили: умножим обе части равенства (8) на $\frac{1}{\pi i} \frac{dt}{t-z}$, $z \in S^-$, проинтегрируем по L и перейдем к пределу при $z \to t$.

Тогда, учитывая голоморфность функций $(z^p \varphi_p(z))^{(q)}$ в области S^+, получим

$$\overline{\varphi_\alpha(t)} - \frac{1}{\pi} \int_L \overline{\varphi_\alpha(\tau)} \, d\theta + \sum_{k=\alpha}^{n-1} \sum_{q=0}^{k} \sum_{l=0}^{k-q} \sum_{p=l}^{n-1} \int_L F_{kqlp}^{\alpha}(t, \tau) \, \varphi_p(\tau) \, d\tau = h_\alpha(t), \tag{9}$$

где

$$F_{kqlp}^{\alpha}(t, \tau) = \frac{(-1)^{q+1}}{2\pi i} \tau^p \frac{d^q}{d\tau^q} \left[\frac{A_{kqlp}^{\alpha}(\tau) - A_{kqlp}^{\alpha}(t)}{\tau - t} \right],$$

$$h_\alpha(t) = \frac{1}{2} G_\alpha(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{G_\alpha(\tau)}{\tau - t} d\tau, \qquad \theta = \arg(\tau - t).$$

Если теперь воспользоваться представлением Н. И. Мусхелишвили [4] для голоморфной функции $\varphi_p(z)$ в виде

$$\varphi_p(z) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\mu_p(\tau)}{\tau - z} d\tau + i C_p, \tag{10}$$

где $\mu_p(\tau)$ — действительная непрерывная функция, а C_p — вещественная постоянная, то для определения вещественных функций $\mu_p(\tau)$ и постоянных C_p $(p = 0, 1, \ldots, n-1)$ получим систему интегральных уравнений Фредгольма вида

$$\mu_k(t) + \sum_{p=0}^{n-1} \int_L K_{kp}(t, \tau) \, \mu_p(\tau) \, ds = \omega_k(t) + \sum_{p=0}^{n-1} C_p f_{kp}(t) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Решая эту систему, найдем функции $\mu_p(\tau)$ и постоянные C_p $(p=0, 1, \ldots, n-1)$, а по формуле (10) получим функции $\varphi_p(z)$ $(p=0, 1, \ldots, n-1)$. Подставляя эти функции в равенство (2), получим решение задачи.

§ 4. Рассмотрим IV задачу.

Условия (6) задачи можно записать в виде

$$\left[\frac{\overline{\partial^{n-1} F(t, \bar{t})}}{\partial t^{n-k} \partial \bar{t}^{k-1}}\right] = \tag{11}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{q=0}^{n-k} C_{n-k}^{q} \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{\nu} i^{\nu+q} C_{k-1}^{\nu} \left[C_{q+\nu+1}(t) \frac{\partial^{n-1} F(t, \bar{t})}{\partial x^{n-q-\nu-1} \partial y^{q+\nu}} + h_{q+\nu+1}(t) \right],$$

где

$$C_k(t) = -\frac{a_k - ib_k}{a_k + ib_k}, \quad h_k(t) = \frac{2g_k(S)}{a_k + ib_k}.$$

Если теперь воспользоваться представлением (2) и произвести преобразования предыдущего параграфа, то равенства (11) примут вид

$$\overline{(t^k \varphi_k(t))^{(n-k-1)}} = \sum_{p=k}^{n-1} \int_L A_{pk}(t, \tau) \overline{(\tau^p \varphi_p(\tau))^{(n-p-1)}} d\tau +$$

$$+ \sum_{p=0}^{n-1} \int_L \gamma_{pk}(t, \tau) \varphi_p(\tau) d\tau + \Gamma_k(t) \quad (k=0, 1, \ldots, n-1), \tag{12}$$

где $A_{pk}(t, \tau)$ $\gamma_{pk}(t, \tau)$, $\Gamma_k(t)$ — известные функции, удовлетворяющие условию Гельдера вместе со своими производными порядка $\leqslant 2n$.

Используя интегральное представление Д. И. Шермана [5], из равенств (12), как и в предыдущем параграфе, получим систему интегральных уравнений Фредгольма, к решению которой и приводится решение данной задачи.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. Ф. Д. Гахову за руководство работой.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
23 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, 1948. [2] Ф. Д. Гахов, Изв. Казанск. физ.-мат. об-ва при КГУ им. В. И. Ульянова-Ленина, **14**, сер. 3 (1949). [3] Д. А. Квеселава, Сообщ. АН Груз. ССР, **6** (1945). [4] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1946. [5] Д. И. Шерман, Изв. АН СССР, сер. матем., **10**, 121 (1946).