Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 4

МАТЕМАТИКА

А. Д. МЫШКИС и В. Э. АБОЛИНЯ

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 21 VII 1951)

Пусть в n-мерном ($n \geqslant 1$) евклидовом пространстве $x_1, \ldots, x_n$ (сокращенно, x) дана ограниченная область G с границей Γ. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{B}_{1k} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{C}_{1k} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} + \mathbf{D}_1 \mathbf{i} + \mathbf{F}_1 \mathbf{u} = \mathbf{h}_1, \\ \mathbf{A}_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{B}_{2k} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{C}_{2k} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x_k} + \mathbf{D}_2 \mathbf{u} + \mathbf{F}_2 \mathbf{i} = \mathbf{h}_2.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь коэффициенты $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{F}_2$ представляют собой квадратные матрицы порядка $m \geqslant 1$ с элементами, зависящими от x, t и определенными в цилиндре $Ц$: $x \in G$, $0 \leqslant t < T$ ($0 < T \leqslant \infty$). Искомыми же являются колонные матрицы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{u}$ с m элементами каждая; эти элементы также определены в $Ц$. Мы будем считать в этой статье, что матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ симметричны, а матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_k}$, $\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_k}$ ($k = 1, \ldots, n$), $\mathbf{D}$ и $\mathbf{F}$ равномерно непрерывны в $Ц$; от решения $\mathbf{i}$, $\mathbf{u}$ мы будем требовать равномерно непрерывную дифференцируемость в $Ц$. Все величины считаются вещественными.

Основное тождество. Легко непосредственно проверить, что если $\mathbf{h}_1 \equiv \mathbf{h}_2 \equiv 0$, все $\mathbf{C}_{1k} \equiv \mathbf{C}_{2k}^{*}$ (звездочка означает транспонированную матрицу), и если для любого решения $\mathbf{i}$, $\mathbf{u}$ системы (1) обозначить $\mathbf{i} = e^{\alpha t} \mathbf{j}$ $\mathbf{u} = e^{\alpha t} \mathbf{v}$, где α — какая-либо постоянная, то имеет место тождество

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt} \int_G [(\mathbf{A}_1 \mathbf{j}, \mathbf{j}) + (\mathbf{A}_2 \mathbf{v}, \mathbf{v})]\, dG = \int_G \left\{ \left(\left(\frac{d\, \mathbf{A}_1}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{d\, \mathbf{B}_{1k}}{\partial x_k} - 2\alpha \mathbf{A}_1 - 2\mathbf{D}_1 \right) \mathbf{j}, \mathbf{j} \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\, \mathbf{C}_{2k}}{\partial x_k} - \mathbf{F}_1^{*} - \mathbf{F}_2 \right) \mathbf{j}, \mathbf{v} \right) + \left(\left(\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\, \mathbf{B}_{2k}}{\partial x_k} - 2\alpha \mathbf{A}_2 - 2\mathbf{D}_2 \right) \mathbf{v}, \mathbf{v} \right) \right\} dG - \\ - \int_G \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} [(\mathbf{B}_{1k} \mathbf{j}, \mathbf{j}) + 2(\mathbf{C}_{2k} \mathbf{j}, \mathbf{v}) + (\mathbf{B}_{2k} \mathbf{v}, \mathbf{v})]\, dG. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь под $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ понимается число, определяемое из колонных матриц $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по правилу вычисления скалярного произведения векторов.

Обозначим через $\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{j}, \mathbf{v})$ квадратичную относительно $j_1, \ldots, j_m$, $v_1, \ldots, v_m$ форму, стоящую в фигурных скобках в тождестве (2).

Мы будем впредь писать $\mathbf{P}>0$ и $\mathbf{P}\geqslant 0$, если симметричная матрица $\mathbf{P}$, соответственно, является положительно и неотрицательно определенной.

Теорема. *Пусть все* $\mathbf{C}_{1k}=\mathbf{C}_{2k}^{*}$, $\mathbf{B}_{1k}|_{\Gamma}=0$, $\mathbf{A}_1\geqslant 0$, $\mathbf{A}_2\geqslant 0$ *и при некотором* α *форма* $\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{j},\mathbf{v})$ *является отрицательно определенной в каждой точке Ц. Тогда не может быть более одного решения системы* (1), *удовлетворяющего краевым условиям*

$$\mathbf{i}\,|_{t=0}=f(x),\ \mathbf{u}\,|_{t=0}=\varphi(x)\ \ (x\in G),\ \mathbf{u}\,|_{x\in\Gamma}=\psi(x,t)\quad (0\leqslant t<T) \tag{3}$$

(при этом значения на Γ понимаются в предельном смысле).

Доказательство. Теорема, очевидно, сводится к тому утверждению, что при $\mathbf{h}_1=\mathbf{h}_2=0$ и при нулевых краевых условиях решение обязано тождественно равняться нулю в *Ц*. Но тогда к этому решению можно применить тождество (2). Второй из интегралов, стоящих в правой части этого тождества, приводится к интегралу по Γ и обращается в нуль при $0\leqslant t<T$ в силу равенств $\mathbf{v}\,|_{\Gamma}=0$, $\mathbf{B}_{1k}|_{\Gamma}=0$. Первый же из этих интегралов, согласно условию, неположителен при всех $t\in[0,T)$. Значит, $\int\limits_G[(\mathbf{A}_1\mathbf{j},\mathbf{j})+(\mathbf{A}_2\mathbf{v},\mathbf{v})]\,dG$ как функция от t при $0\leqslant t<T$ не возрастает. Однако, поскольку $\mathbf{A}_1\geqslant 0$ и $\mathbf{A}_2\geqslant 0$, эта функция неотрицательна. Поэтому, будучи равной нулю при $t=0$, она равна нулю и при $0\leqslant t<T$. Но эта форма, рассматриваемая как функция x, непрерывна и неположительна в *Ц*. Поэтому она тождественно равна нулю в *Ц*; утверждение теоремы следует теперь из отрицательной определенности формы $\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{j},\mathbf{v})$.

Замечание 1. В систему (1) функции $\mathbf{i}$ и $\mathbf{u}$ входят симметрично. Значит, теорема о единственности верна и в том случае, если условие $\mathbf{B}_{1k}|_{\Gamma}=0$ заменить на $\mathbf{B}_{2k}|_{\Gamma}=0$, а $\mathbf{u}\,|_{\Gamma}=\psi$ на $\mathbf{i}\,|_{\Gamma}=\psi$. Это же соображение надо иметь в виду и в дальнейших замечаниях.

Замечание 2. Пусть $\mathbf{A}_1>0$ и $\mathbf{A}_2>0$ в цилиндре *Ц*: $x\in G$, $0\leqslant t<T$. Тогда для любого $t^*\in(0,T)$ форма $\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{j},\mathbf{v})$ будет отрицательно определенной на множестве $x\in G$, $0\leqslant t\leqslant t^*$, если только α достаточно велико. Действительно, квадратичная форма $\frac{1}{\alpha}\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{j},\mathbf{v})$ при $\alpha\to+\infty$ переходит в заведомо отрицательно определенную форму $-2[(\mathbf{A}_1\mathbf{j},\mathbf{j})+(\mathbf{A}_2\mathbf{v},\mathbf{v})]$. Значит, согласно известному критерию знакоопределенности Сильвестра, форма $\frac{1}{\alpha}\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{j},\mathbf{v})$ будет отрицательно определенной при достаточно больших α.

Замечание 3. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{C}_{2k}}{\partial x_k}-\mathbf{F}_1^{*}-\mathbf{F}_2\equiv 0$ всюду в *Ц*; будем требовать, чтобы $\mathbf{A}_1\geqslant 0$, $\mathbf{A}_2\geqslant 0$, но с тем дополнительным условием, что если в $\widetilde{Ц}$ $\mathbf{A}_p\not>0$ $(p=1,2)$, то

$$\mathbf{D}_p+\mathbf{D}_p^{*}-\frac{\partial\mathbf{A}_p}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{B}_{pk}}{\partial x_k}>0\ \text{ в } Ц.$$

Тогда форма $\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{j},\mathbf{v})$ будет отрицательно определенной для $x\in G$, $0\leqslant t\leqslant t^*$ $(t^*<T)$ при достаточно больших α. Это замечание является обобщением доказанной в [1] теоремы о единственности решения обобщенной системы телеграфных уравнений.

Замечание 4. Граничные условия $\mathbf{u}\,|_{\Gamma}=\psi$ можно заменить на более общие; это можно сделать различными способами. Пусть, например, $\mathbf{C}_{1k}\equiv\mathbf{C}_{2k}^{*}$, $\mathbf{B}_{1k}|_{\Gamma}=\mathbf{B}_{2k}|_{\Gamma}=\mathbf{C}_{1k}|_{\Gamma}=0$ $(k=2,\dots,n)$. Тогда взамен условия $\mathbf{u}\,|_{\Gamma}=\psi$ можно поставить такое, также достаточное для единственности решения (при выполнении требований, которые будут сформулированы ниже):

$$\left[(\mathbf{C}_{11} - \mathbf{L})\,\mathbf{u} + \mathbf{M}\mathbf{i} + \mathbf{N}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + \mathbf{P}\int_0^t \mathbf{i}\,dt \right]_{x \in R_1 + R_2} = \psi(x, t),$$

$$L^* \mathbf{i}|_{x \in R_1 + R_2} = \chi(x, t). \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{L}, M, \mathbf{N}$ и $\mathbf{P}$ — квадратные матрицы порядка m, определенные при $0 \leqslant t < T$, $x \in R_1 + R_2$, где $R_1 \subset \Gamma$ ($R_2 \subset \Gamma$) — совокупность всех начальных (конечных) точек интервалов, на которые распадается пересечение G с любой прямой, параллельной оси OX_1; при этом матрицы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{P}$ симметричны, а $\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{P}, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ равномерно непрерывны для $x \in R_1 + R_2$, $0 \leqslant t < T$. Кроме того, если $n > 1$, то надо потребовать правильность Γ; достаточно, чтобы Γ была кусочно-гладкой или (более общий случай) чтобы, если обозначить через $\vartheta(x_2, \ldots, x_n)$ число точек пересечения прямой $x_2 = \text{const}, \ldots, x_n = \text{const}$ с множеством $R_1 + R_2$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n < \infty.$$

Если $\psi(x, t) \equiv \chi(x, t) \equiv 0$, то формула (2), как легко подсчитать, перейдет в такую (пользуемся тем, что $(\mathbf{C}_{21}\mathbf{j}, \mathbf{v}) = ((\mathbf{C}_{11} - \mathbf{L})\,\mathbf{v}, \mathbf{j}) + (\mathbf{L}^*\mathbf{j}, \mathbf{v})$):

$$\frac{d}{dt}\left\{ \int_G [(\mathbf{A}_1\mathbf{j}, \mathbf{j}) + (\mathbf{A}_2\mathbf{v}, \mathbf{v})]\, dG - \right.$$

$$\left. - \left(\int_{R_2} - \int_{R_1} \right) \left[(\mathbf{N}\,\mathbf{j}, \mathbf{j}) + e^{-2\alpha t} \left(\mathbf{P}\int_0^t \mathbf{j} e^{\alpha t}\, dt, \int_0^t \mathbf{j} e^{\alpha t}\, dt \right) \right] dx_2 \ldots dx_n \right\} =$$

$$= \int_G \mathbf{K}_\alpha(\mathbf{j}, \mathbf{v})\, dG + \left(\int_{R_2} - \int_{R_1} \right) \left[\left(\left(-\mathbf{B}_{11} + 2\mathbf{M} + 2\alpha\mathbf{N} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \right) \mathbf{j}, \mathbf{j} \right) + (-\mathbf{B}_{21}\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \right.$$

$$\left. + e^{-2\alpha t} \left(\left(2\alpha\,\mathbf{P} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \int_0^t \mathbf{j} e^{\alpha t}\, dt, \int_0^t \mathbf{j} e^{\alpha t} dt \right) \right] dx_2 \ldots dx_n.$$

Отсюда ясно, что если при некотором α форма $\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{j}, \mathbf{v})$ отрицательно определена в $Ц$, $\mathbf{A}_1 \geqslant 0$, $\mathbf{A}_2 \geqslant 0$ в $Ц$ и при $0 \leqslant t < T$

$$-\mathbf{N} \geqslant 0, \quad -\mathbf{P} \geqslant 0, \quad \mathbf{B}_{11} - \mathbf{M} - \mathbf{M}^* - 2\alpha\mathbf{N} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \geqslant 0,$$

$$\mathbf{B}_{21} \geqslant 0, \quad -2\alpha\mathbf{P} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \geqslant 0 \quad (\text{на } R_2),$$

$$\mathbf{N} \geqslant 0, \quad \mathbf{P} \geqslant 0, \quad -\mathbf{B}_{11} + \mathbf{M} + \mathbf{M}^* + 2\alpha\mathbf{N} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \geqslant 0,$$

$$-\mathbf{B}_{21} \geqslant 0, \quad 2\alpha\mathbf{P} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \geqslant 0 \quad (\text{на } R_1),$$

то имеет место теорема о единственности решения системы (1) при граничных условиях (4); доказательство не отличается от проведенного выше. Можно перенести на этот случай и замечание 2. Замечание 4 содержит как частный случай доказанную в [2] теорему о единственности решения смешанной задачи для обобщенной системы телеграфных уравнений при общих граничных условиях.

З а м е ч а н и е 5. Теорема о единственности справедлива и при более широких предположениях о коэффициентах (т. е. если не требовать равномерной непрерывности квадратных матриц, фигурирующих в тождестве (2)). Например, при краевых условиях (3) (при выполнении прочих условий теоремы) от элементов этих матриц достаточно требовать непрерывность и абсолютную интегрируемость в $Ц$ и мажорируемость в $Ц$ всех элементов матриц $\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t}$ и $\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t}$ по абсолютной величине абсолютно интегрируемой по x функции, не зависящей от t; при этом равенство $\mathbf{B}_{1k}|_\Gamma = 0$ понимается в предельном смысле: для каждого $t \in [0, T)$ оно должно выполняться при любых фиксированных $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$, кроме, быть может, множества $n-1$-мерной меры нуль. Аналогично можно было бы ослабить требования на решение. Граничные условия можно было бы понимать также в обобщенном смысле, подобно тому, как это сделано в ([3]).

Замечание 6. Условия определенности, фигурирующие в формулировке теоремы, являются существенными, но не необходимыми. Эта единственность имеет место, например, если $|\mathbf{A}_1| \neq 0$, $|\mathbf{A}_2| \neq 0$ и любое решение системы (1) при $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2 = 0$, $\mathbf{i}|_{t=0} = \mathbf{u}|_{t=0} = 0$ голоморфно в $Ц$ по t, причем любое такое решение обладает в $Ц$ всеми непрерывными производными вида

$$\frac{\partial^p \mathbf{i}}{\partial t^{p-1}\,\partial x_j}, \quad \frac{\partial^p \mathbf{i}}{\partial t^p}, \quad \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial t^{p-1}\,\partial x_j}, \quad \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial t^p} \quad (p = 1, 2, \ldots;\ j = 1, \ldots, n).$$

Это вытекает из леммы, приведенной в ([4]). Так будет, например, для системы уравнений Коши — Римана ($n = m = 1$), для которой условия теоремы не выполняются ни при каком α (впрочем, для этой системы единственность решения смешанной задачи легко вывести и непосредственно из принципа симметрии и теоремы о единственности для аналитических функций ([5])).

Замечание 7. Существенность условий теоремы можно видеть хотя бы из такого примера (если отбросить тривиальные, скажем, когда все коэффициенты системы (1) равны нулю и т. п.). Пусть $n = m = 1$,

$$f(s) = 0 \quad (-\infty < s \leqslant 0), \qquad f(s) = e^{-1/s} \quad (0 < s < \infty),$$
$$c(x, t) = -xt^{-2} e^{1/t} f(x) f'(1 - xe^{1/t}) [f(t-x)]^{-1} \quad (t > \max\{x, 0\}),$$
$$c(x, t) = 0 \ (t \leqslant \max\{x, 0\}).$$

Функция $c(x, t)$ имеет непрерывные производные всех порядков на всей плоскости x, t. Тогда система уравнений

$$\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + c(x, t)\, i = 0$$

при условиях

$$u = i = 0 \quad (t = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1), \qquad u = 0 \quad (x = 0,\ 0 \leqslant t < \infty),$$
$$u = 0 \quad (x = 1,\ 0 \leqslant t < \infty)$$

имеет решение

$$i = f(t - x), \qquad u = f(x) f(1 - xe^{1/t}),$$

обладающее непрерывными производными всех порядков на всей плоскости и отличное от нуля при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t < \infty$ в любой близости от точки $x = t = 0$.

Латвийский государственный университет

Поступило
13 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. А. Бразма и А. Д. Мышкис, Прикл. мат. и мех., 15, № 4,456 (1951). [2] А. Д. Мышкис и В. Э. Аболиня, Уч. зап. Латв. ун-та, 6 (1951). [3] А. Д. Мышкис, Мат. сборн., 26 (68), 3, 341 (1950). [4] А. Д. Мышкис, Усп. матем. наук, 3, 2 (24), 38 (1948). [5] И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, 1945, стр. 321, 185.