Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 3

МАТЕМАТИКА

М. М. ВАЙНБЕРГ

К ВАРИАЦИОННОЙ ТЕОРИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 VI 1951)

Вопрос о собственных значениях и собственных функциях уравнения

$$\mu u(x) = \int\limits_B K(x, y)\, g(u(y), y)\, dy \tag{1}$$

был исследован вариационным методом в работах ([8], [9], [4]) и в некоторых работах автора.

Метод доказательства в работах автора ([11], [15]) состоял в том, что ядро $K(x, y)$ заменялось вырожденным ядром $K_i(x, y)$, после чего задача о собственных функциях уравнения (1) сводилась к конечной экстремальной задаче, а затем совершался предельный переход по некоторой подпоследовательности. В настоящей работе мы исследуем функционал

$$f(u) = \int\limits_B dy \int\limits_0^{u(y)} g(v, y)\, dv \tag{2}$$

и устанавливаем для него ряд свойств, что позволяет применить к исследованию уравнения (1) общие вариационные принципы.

1°. Пусть $g(u, x)$ есть действительная функция, непрерывная по u $(-\infty < u < +\infty)$ и измеримая в B по x, где B есть ограниченная область n-мерного евклидова пространства. В этом случае (([11]), стр. 382) $g(u(x), x)$ измерима в B по x для всякой измеримой в B функции $u(x)$, так что мы можем рассматривать $hu = g(u(x), x)$ как оператор, который преобразует измеримые функции в измеримые.

Лемма 1. *Если* $hu = g(u(x), x)$ *есть непрерывный оператор с областью определения* $L_p(B)$ *и областью значений в* $L_q(B)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(например* ([13]), *когда* $|g(u, x)| \leqslant a(x) + b\,|u|^{p-1}$, *где* $a(x) \in L_q$, $b = \mathrm{const}$), *то функционал* (2) *удовлетворяет условию Липшица в любом шаре* $\|u\| \leqslant r$ *пространства* L_p, *притом* $\operatorname{grad} f(u) = hu = g(u(x), x)$, *т. е.* $f(u + v) - f(u) = (hu, v) + \omega(u, v)$ (*(hu, v) — скалярное произведение hu и v*), *где*

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{\omega(u, v)}{\|v\|} = 0.$$

При доказательстве данной леммы мы исходим из тождеств

$$f(u_2) - f(u_1) = \int\limits_B [u_2(y) - u_1(y)]\, dy \int\limits_0^1 g\,[u_1(y) + t(u_2(y) - u_1(y)), y]\, dt,$$

$$f(u + v) - f(u) - (hu, v) = \int\limits_B v(y)\, dy \int\limits_0^1 [g(u(y) + tv(y), y) - g(u(y), y)]\, dt,$$

опираемся на непрерывность оператора hu и используем некоторые оценки.

2°. Пусть ядро $K(x, y) \in L_2$ симметрично и позитивно (т. е. положительно определенно или положительно полуопределенно). Обозначим через $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ ортонормальную систему всех собственных функций ядра $K(x, y)$, отвечающих его собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $(0 < \lambda_i \leqslant \lambda_{i+1})$, и рассмотрим последовательность вырожденных ядер

$$K_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Пусть, далее, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ есть произвольный элемент пространства l_2. Рассмотрим семейство функций

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k(x) \tag{4}$$

и функционал

$$f(\xi) = \int_B dy \int_0^{\omega(y)} g(v, y)\, dv, \tag{5}$$

заданный в пространстве l_2.

Лемма 2. *Если последовательность* (3) *сходится в* L_p $(p \geqslant 2)$, *то для всякой точки* $\xi \in l_2$ *функция* $\omega(x) \in L_p$.

Для доказательства мы рассматриваем отрезок ряда (4) $\omega_{n,r}(x)$ и соответствующее выражение $K_{n,r}(x, y) = K_{n+r}(x, y) - K_n(x, y)$. Для них мы непосредственно устанавливаем неравенство

$$\int_B \omega_{n,r}(x) z(x)\, dx \leqslant c \left(\int_B \int_B K_{n,r}(x, y) z(x) z(y)\, dx\, dy \right)^{1/2}, \tag{6}$$

где $c = \|\xi\|$, а $z(x)$ есть произвольная функция из L_q. Так как левая часть (6) есть линейный функционал в L_q, то, используя свойства линейных функционалов, мы из (6) находим, что

$$\left(\int_B |\omega_{n,r}(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \leqslant c \left(\int_B \int_B |K_{n,r}(x, y)|^p\, dx\, dy \right)^{1/2p}.$$

Отсюда и следует лемма 2.

Лемма 3. *Если* $hu = g(u(x), x)$ *есть непрерывный оператор с областью определения* L_p *и областью значений в* L_q, *а последовательность* (3) *сходится в* L_p, *то функционал* $f(\xi)$ *является слабо непрерывным во всяком шаре* $\|\xi\| \leqslant c$ *пространства* l_2 *и в этом шаре он имеет слабо непрерывный градиент:* $\operatorname{grad} f(\xi) = F(\xi) = (F_1\xi, F_2\xi, \ldots)$, *где*

$$F_i\xi = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_B \varphi_i(y)\, g(\omega(y), y)\, dy. \tag{7}$$

Доказательство существования у $f(\xi)$ градиента и вывод формулы (7) используют предыдущие леммы. Для доказательства слабой непрерывности градиента мы сначала устанавливаем, что если последовательность $\{\xi^{(n)}\}$ слабо сходится к $\xi^{(0)} \in l_2$, то соответствующая (по формуле (4)) последовательность $\{\omega^{(n)}(x)\}$ сходится в L_p к $\omega^{(0)}(x)$. Это предложение вытекает из соображений и выкладок, которые привели нас к лемме 2 настоящей работы и лемме 1 работы [11]. Затем устанавливается соотношение

$$\iint\limits_{B\,B} K(x,y)\,z(x)\,z(y)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\Bigl(\int\limits_B z(x)\,\varphi_k(x)\,dx\Bigr)^2,$$

справедливое для всякой функции $z(x) \in L_q$, которое приводит к неравенству

$$\| F(\xi^{(0)}) - F(\xi^{(n)}) \|_{l_2} \leqslant \| K(x,y) \|_{L_p} \| h\omega^{(0)} - h\omega^{(n)} \|^2_{L_q}.$$

Это неравенство, совместно с предложением, что $\{\omega^{(n)}(x)\}$ сходится к $\omega^{(0)}(x)$, устанавливает слабую непрерывность градиента. Из слабой непрерывности градиента [6] (даже из компактности градиента [14]) вытекает слабая непрерывность $f(\xi)$.

3°. Будем теперь решать задачу на экстремум функционала $f(\xi)$ в шаре $\|\xi\| \leqslant c$.

В силу леммы 3 мы можем воспользоваться вариационным принципом Л. А. Люстерника [2] (см. также [10], теорема 3.2). Этот принцип (применительно к шару) состоит в том, что если $f(\xi)$ достигает экстремума в некоторой внутренней точке, то в этой точке $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$; если $f(\xi)$ достигнет экстремума на сфере $\|\xi\| = c$, то $\operatorname{grad} f(\xi) = \mu\xi$, где μ — некоторое действительное число. Так как абсолютный максимум и абсолютный минимум функционала $f(\xi)$ в шаре $\|\xi\| \leqslant c$ могут совпасть лишь тогда, когда $f(\xi) = \mathrm{const}$, то из принципа Л. А. Люстерника вытекает существование, по меньшей мере, одной точки $\eta^{(1)}$ $(0 < \|\eta^{(1)}\| \leqslant c)$, в которой $\operatorname{grad} f(\eta^{(1)}) = \mu_1 \eta^{(1)}$.

Уменьшая c, мы выделим счетное множество различных $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots$, для которых

$$\operatorname{grad} f(\eta^{(k)}) = \mu_k \eta^{(k)} \quad (k = 1, 2, \ldots;\ \|\eta^{(k)}\| > 0). \tag{8}$$

Из (8), (7) и (4) мы приходим к предложению:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:* 1) *последовательность вырожденных ядер* (3) *сходится в* L_p $(p \geqslant 2)$; 2) $hu = g(u(x), x)$ *есть непрерывный оператор с областью определения* L_p *и областью значений в* L_q $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, *притом почти всюду* $g(0, x) = 0$.

Тогда уравнение (1) *имеет не менее счетного числа собственных функций* $\{\psi_\nu(x)\}$, *принадлежащих* L_p, *нормы которых в* L_p *убывают. Каждая такая функция представима в виде*

$$\psi_\nu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k^{(\nu)}}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k(x), \quad \eta^{(\nu)} \in l_2, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

и отвечает собственному значению уравнения (1)

$$\mu_\nu = \frac{1}{c_\nu^2} \int \psi_\nu(x)\, g(\psi_\nu(x), x)\, dx, \quad c_\nu = \|\eta^{(\nu)}\| > 0. \tag{10}$$

Данная теорема представляет обобщение теорем I и III работы [11] в случае $n = 1$.

4°. Доказанные в пунктах 1° и 2° леммы позволяют далее исследовать задачу о точках минимакса функционала $f(\xi)$ на сфере $\|\xi\| = c$. Основой этого исследования служит теория, созданная Л. А. Люстерником и развитая им и его учениками В. И. Соболевым и Э. С. Цитланадзе [1, 3, 5, 6].

Рассуждая так же, как в работе ([12]), мы приходим к предложению:

Теорема 2. *Пусть выполнены условия: 1) $K(x, y)$ есть симметричное, позитивное и невырожденное ядро; 2) последовательность вырожденных ядер (3) сходится в L_p $(p \geqslant 2)$; 3) $hu = g(u(x), x)$ есть непрерывный оператор с областью определения L_p и областью значений в L_q $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, притом $g(-u, x) = -g(u, x)$ и при $u > 0$ почти всюду $g(u, x) > 0$.*

Тогда уравнение (1) при всяком $c > 0$ имеет не менее счетного числа попарно линейно независимых собственных функций, принадлежащих L_p и представимых в виде (9), где $\|\eta^{(\nu)}\| = c$. Эти собственные функции соответствуют собственным значениям, представимым в виде (10), притом μ_ν образуют убывающую последовательность, сходящуюся к нулю. Данная теорема представляет обобщение теоремы В. И. Соболева ([4]) и теоремы 3 работы ([12]).

5°. Пусть среди собственных чисел симметричного ядра $K(x, y)$ имеются положительные и отрицательные. В этом случае вместо (4) мы рассматриваем семейство функций

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k \xi_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \varphi_k(x), \quad e_k = \operatorname{sgn} \lambda_k, \quad 0 < |\lambda_i| \leqslant |\lambda_{i+1}|$$

и функционал

$$\varphi(\xi) = \int_B dy \int_0^{w(y)} g(v, y)\, dv.$$

Так же как раньше, функционал $\varphi(\xi)$ вместе с $\operatorname{grad} \varphi(\xi) = \Phi(\xi) = (\Phi_1 \xi, \Phi_2 \xi, \ldots)$, где

$$\Phi_i \xi = \frac{e_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} \int_B \varphi_i(y)\, g(w(y)\, y)\, dy \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

оказываются слабо непрерывными во всякой точке $\xi \in l_2$.

Решая задачу на условный экстремум функционала $\varphi(\xi)$ относительно гиперболоида $((\xi)) = c$, где $((\xi)) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} e_k \xi_k^2\right)^{1/2}$, мы другим методом приходим к теореме, установленной в работе ([15]).

Поступило
28 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Люстерник, Изв. АН СССР, сер. матем., № 3, 257 (1939); Тр. Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, **19** (1947). [2] Л. А. Люстерник, Матем. сборн., **41**, в. 3 (1934); Усп. матем. наук, **1**, 77 (1936). [3] В. И. Соболев, ДАН, **31**, № 8 (1941). [4] В. И. Соболев, ДАН, **71**, № 5 (1950). [5] Э. С. Цитланадзе, ДАН, **53**, № 4 (1946); ДАН, **57**, № 9 (1947); автореферат диссертации, МГУ, 1951. [6] Э. С. Цитланадзе, ДАН, **56**, № 1 (1947). [7] А. П. Гремячинский, ДАН, **60**, № 3 (1948). [8] L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen, Berlin, 1931, S. 140—156. [9] M. Golomb, Math. Zs., **39**, H. 1 (1934). [10] E. Rothe, Ann. of Math., **49**, No. 2, 265 (1948). [11] М. М. Вайнберг, Матем. сборн., **26** (68), № 3, 365 (1950). [12] М. М. Вайнберг, ДАН, **75**, № 5 (1950). [13] М. М. Вайнберг, ДАН, **73**, № 2 (1950). [14] М. М. Вайнберг, ДАН, **78**, № 5 (1951). [15] М. М. Вайнберг, ДАН, **78**, № 6 (1951).