Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 4

МАТЕМАТИКА

А. Е. ЛИБЕР

О КОМИТАНТАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 28 IV 1951)

Каждому геометрическому дифференциальному объекту Ω в пространстве X_n сопоставляется подгруппа $\mathfrak{H}$ дифференциальной группы $\mathfrak{D}^{(v, n)}$, являющаяся стационарной подгруппой, соответствующей представлению группы $\mathfrak{D}^{(v, n)}$ на множестве значений геометрического дифференциального объекта Ω, ассоциированной с точкой, представляющей его значение в некоторой системе координат; если начальная система координат зафиксирована (что мы в дальнейшем предполагаем), то указанное сопоставление однозначно ([1]). Будем называть подгруппу $\mathfrak{H}$ характеристической группой геометрического дифференциального объекта Ω. Геометрический дифференциальный объект Ω_1, являющийся функцией дифференциального продолжения порядка s объекта Ω (([1]), стр. 195), назовем дифференциальным комитантом порядка s геометрического дифференциального объекта Ω; в частности, дифференциальные комитанты нулевого порядка будем называть просто комитантами. Из двух геометрических дифференциальных объектов Ω_1 и Ω_2 первый тогда и только тогда является комитантом второго, когда характеристическая группа $\mathfrak{H}_2$ второго является подгруппой характеристической группы $\mathfrak{H}_1$ первого, т. е. $\mathfrak{H}_2 \subset \mathfrak{H}_1$ ([2]).

Геометрический дифференциальный объект Ω с характеристической группой $\mathfrak{H}$ будет класса $u \leqslant v$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_u^{(v, n)} \not\supset \mathfrak{N}_{u-1}^{(v, n)}$, где $\mathfrak{N}_i^{(v, n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, v)$ — известная последовательность нормальных делителей дифференциальной группы $\mathfrak{D}^{(v, n)}$ ([2]); для существования у геометрического дифференциального объекта Ω комитанта класса $r \leqslant v$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\mathfrak{H}\mathfrak{N}_r^{(v, n)} \neq \mathfrak{H}\mathfrak{N}_{r-1}^{(v, n)}. \tag{1}$$

Действительно, если Ω_1 есть комитант класса r геометрического дифференциального объекта Ω и его характеристическая группа есть $\mathfrak{H}_1$, то $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_1\mathfrak{N}_r^{(v, n)} \not\supset \mathfrak{N}_{r-1}^{(v, n)}$, откуда следует $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_r^{(v, n)} \subset \mathfrak{H}_1\mathfrak{N}_r^{(v, n)}$ и затем условие (1). Обратно, если условие (1) выполнено, то группа $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}\mathfrak{N}_r^{(v, n)}$ является характеристической группой геометрического дифференциального объекта Ω_1, который, как это можно показать, используя общий метод отыскания геометрических дифференциальных объектов ([3]), основанный на методе отыскания непрерывных групп Ли ([4]), является частью (следовательно, комитантом, ([1]), стр. 148) геометрического дифференциального объекта Ω.

Пусть теперь геометрический дифференциальный объект $\mathfrak{Q}$ класса $v > 1$ с характеристической группой $\mathfrak{H}$ не имеет комитантов классов $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 1$; тогда, в силу условия (1), имеют место соотношения

$$\mathfrak{H}\mathfrak{N}_p^{(v,\,n)} = \mathfrak{H}\mathfrak{N}_{p-1}^{(v,\,n)}, \quad \mathfrak{H}\mathfrak{N}_q^{(v,\,n)} = \mathfrak{H}\mathfrak{N}_{q-1}^{(v,\,n)}. \tag{2}$$

Переходя к алгебре Ли $D^{(v,\,n)}$, соответствующей дифференциальной группе $\mathfrak{D}^{(v,\,n)}$, мы получаем из соотношений (2) следующие равенства

$$H + N_p^{(v,\,n)} = H + N_{p-1}^{(v,\,n)}, \quad H + N_q^{(v,\,n)} = H + N_{q-1}^{(v,\,n)}, \tag{3}$$

где H — подалгебра, соответствующая характеристической группе $\mathfrak{H}$ и $N_i^{(v,\,n)}$ — идеал, соответствующий нормальному делителю $\mathfrak{N}_i^{(v,\,n)}$. Из равенств (3) следуют также равенства

$$N_{p-1}^{(v,\,n)} = H_p + N_p^{(v,\,n)}, \quad N_{q-1}^{(v,\,n)} = H_q + N_q^{(v,\,n)}, \tag{4}$$

где $H_p = H \cap N_{p-1}^{(v,\,n)}$ и $H_q = H \cap N_{q-1}^{(v,\,n)}$. Предположим, что $n > 1$. Используя равенства (4) и известные соотношения $[N_i^{(v,\,n)} N_k^{(v,\,n)}] = N_{i+k}^{(v,\,n)}$ ($N_s^{(v,\,n)} = 0$ при $s \geqslant v$) [2], мы получаем

$$N_{p+q-2}^{(v,\,n)} = [H_p H_q] + N_{p+q-1}^{(v,\,n)} \subset H + N_{p+q-1}^{(v,\,n)}. \tag{5}$$

Если бы $p + q - 1 = v$, то из соотношений (5) следовало бы $N_{v-1}^{(v,\,n)} \subset H$ в противоречии с предположением, что класс геометрического дифференциального объекта $\mathfrak{Q}$ равен v. Поэтому справедлива теорема 1.

Теорема 1. *Пусть $p + q = v + 1$; тогда геометрический дифференциальный объект класса v при $n > 1$ имеет комитант класса p или класса q.*

В дальнейшем $m_1, m_2 \ldots$ обозначают целые неотрицательные числа и $p_1, p_2, \ldots$ — целые положительные числа. Обобщением предыдущей теоремы служит теорема 2.

Теорема 2. *Если $v - 1 = m_1(p_1 - 1) + \ldots + m_2(p_2 - 1) + m_s(p_s - 1)$, то геометрический дифференциальный объект $\mathfrak{Q}$ класса v при $n > 1$ имеет комитант, класс которого равен одному из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$.*

Теорема очевидна для $v = 2$; предположим, что теорема верна для геометрических дифференциальных объектов любого класса $< v$, и докажем ее для класса v. Так как $v > 2$, то из произведений $m_i(p_i - 1)$ $(i = 1, \ldots, s)$ хотя бы одно отлично от нуля, пусть $m_1(p_1 + 1) \neq 0$. Тогда, по условию теоремы, $v + 1 = p_1 + q$, где $q = (m_1 - 1)(p_1 - 1) + m_2(p_2 - 1) + \ldots + m_s(p_s - 1) + 1$. Если существует комитант класса p_1, то теорема верна; если же не существует комитанта класса p_1, то, по теореме 1, существует комитант класса q, и, так как $q < v$, то, по предположению, этот комитант класса q имеет, в свою очередь, комитант, класс которого равен одному из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$; последний является также комитантом исходного геометрического дифференциального объекта, что и доказывает теорему.

Из этой теоремы следует, в частности: 1) если $n > 1$, $v > 1$, $p > 1$ и $v \equiv 1 \pmod{p - 1}$, то геометрический дифференциальный объект класса v имеет комитант класса p; 2) при $n > 1$ всякий геометрический дифференциальный объект класса v имеет комитант класса 2 [6]; 3) если при этом v нечетно, то существует также комитант третьего класса, если же v четно и не существует комитантов третьего класса, то существуют комитанты любого четного класса $2r$ $(2r \leqslant v)$ и не существует ни одного комитанта нечетных классов u $(1 < u < v)$.

Если не существует комитантов класса $p \geqslant 1$ у геометрического дифференциального объекта Ω, то будем говорить, что он имеет пропуск на классе p. Так как, по теореме 1, пропуск на классе p обязательно дополняется существованием комитанта класса $v+1-p$, то число всех пропусков на сегменте $[1, 2, \ldots, v]$ не превышает количества чисел из этого сегмента, являющихся классами существующих комитантов; отсюда получаем теорему 3.

Теорема 3. *Число всех пропусков геометрического дифференциального объекта класса* $v > 1$ *при* $n > 1$ *не превышает числа* $\left[\frac{v}{2}\right]$.

Как мы увидим, эта оценка числа пропусков не может быть уменьшена. Если пропусками заполнен сегмент $[r_1, \ldots, r_2]$, где $r_1 > 1$, то $r_2 - r_1 + 1 \leqslant \left[\frac{v-2}{2}\right]$, и в случае равенства обязательно $r_2 = v - 1$. Далее, из теоремы 3 следует, что всякий геометрический дифференциальный объект класса $v > 1$ (при $n > 1$) имеет дифференциальные комитанты порядка не выше $\left[\frac{v-2}{2}\right]$ и любого класса u, где $2 \leqslant u \leqslant v$ (причем оценка порядка не может быть уменьшена).

Систему целых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$ $(1 \leqslant p_1 < p_2 < \ldots < p_s < v)$ будем называть системой возможных пропусков, если существует геометрический дифференциальный объект класса v, не имеющий комитантов классов $p_1, p_2, \ldots, p_s$ и имеющий комитанты любого другого класса u, $1 \leqslant u \leqslant v$. Из теоремы 2 следует, что для того чтобы при $n > 1$ система чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$ являлась системой возможных пропусков, необходимо выполнение условия: все числа, не превышающие v и имеющие форму $m_1(p_1 - 1) + m_2(p_2 - 1) + \ldots + m_s(p_s - 1) + 1$ $(m_1, \ldots, m_s$ неотрицательны), должны находиться среди чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Обратно, пусть это условие выполнено. Рассмотрим линейные подпространства E_i $(i = 1, 2, \ldots, v)$ ([2]) алгебры $D^{(v, n)}$ и определим линейное подпространство $H = E_{p_1} + E_{p_2} + \ldots + E_{p_s}$. Так как $[E_i E_k] = E_{i+k-1}$ $(E_j = 0$ при $j > v)$ ([2]) и числа $p_1, p_2, \ldots, p_s$ удовлетворяют указанному выше условию, то $[HH] \subset H$, следовательно, H есть подалгебра алгебры $D^{(v, n)}$; этой подалгебре соответствует подгруппа $\mathfrak{H}$ дифференциальной группы $\mathfrak{D}^{(v, n)}$, являющаяся характеристической группой некоторого геометрического дифференциального объекта класса v с системой пропусков $p_1, p_2, \ldots, p_s$, который может быть найден с помощью общего метода ([3, 4]). На этом пути может быть построен объект с максимально возможным числом пропусков.

В качестве примера приведем геометрический дифференциальный объект четвертого класса, не имеющий комитантов первого и третьего классов. Он состоит из компонент $\Gamma^{\varkappa}_{\alpha\beta}$, $\Lambda^{\varkappa}_{\alpha\beta\gamma\lambda}$ $(\alpha, \ldots, \omega = 1, \ldots, n)$, симметричных по нижним индексам; при преобразовании координат $\Gamma^{\varkappa}_{\alpha\beta}$ преобразуются как компоненты объекта аффинной связности (([1]), стр. 197), а $\Lambda^{\varkappa}_{\alpha\beta\gamma\lambda}$ преобразуются по следующему закону:

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{\varkappa'}_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda'} = {} & A^{\varkappa'}_{\varkappa} A^{\varkappa}_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda'} - 6A^{\varkappa}_{\omega'(\alpha'\beta'} A^{\omega}_{\gamma'\lambda')} A^{\varkappa'\omega'}_{\varkappa\ \omega} - 3A^{\alpha}_{(\alpha'\beta'} A^{\beta}_{\gamma'\lambda')} A^{\varkappa'}_{\varkappa} \Gamma^{\varkappa}_{\alpha\beta} + \\
& + 4A^{\alpha}_{(\alpha'\beta'\gamma'} A^{\beta\ \ \varkappa'}_{\lambda')\ \varkappa} \Gamma^{\varkappa}_{\alpha\beta} - 12A^{\alpha}_{\omega'(\alpha'} A^{\omega}_{\beta'\gamma'} A^{\beta\omega'\ \varkappa'}_{\lambda')\omega\varkappa} \Gamma^{\varkappa}_{\alpha\beta} - 6A^{\varkappa}_{\omega'(\alpha'\beta'} A^{\alpha\beta\ \ \varkappa'\omega'}_{\gamma'\lambda')\ \varkappa\ \omega} \Gamma^{\omega}_{\alpha\beta} - \\
& - 12A^{\alpha}_{\omega'(\alpha'} A^{\beta\gamma\lambda\ \ \omega'\varkappa'}_{\beta'\gamma'\lambda')\omega\ \varkappa} \Gamma^{\varkappa}_{\alpha\beta} \Gamma^{\omega}_{\gamma\lambda} - 6A^{\alpha}_{(\alpha'\beta'} A^{\gamma\lambda\ \ \varkappa'}_{\gamma'\lambda')\varkappa} \Gamma^{\varkappa}_{\alpha\omega} \Gamma^{\omega}_{\gamma\lambda} + A^{\varkappa'\alpha'\beta\gamma\lambda}_{\varkappa\ \alpha\ \beta'\gamma'\lambda'} \Lambda^{\varkappa}_{\alpha\beta\gamma\lambda}
\end{aligned} \qquad (6)
$$

(где $A^{\alpha_1\cdots\alpha_s\varkappa'}_{\alpha'_1\cdots\alpha'_s\varkappa} = A^{\alpha_1}_{\alpha'_1} \cdots A^{\alpha_s}_{\alpha'_s} \cdot A^{\varkappa'}_{\varkappa}$; обозначения $A^{\varkappa}_{\alpha'_1\cdots\alpha'_s}$, $A^{\varkappa'}_{\alpha_1\cdots\alpha_s}$ см. ([1]), стр. 180—182).

Перейдем теперь к случаю $n = 1$. Так как при $n = 1$ $[N^{(v, n)}_i N^{(v, n)}_i] = N^{(v, n)}_{2i+1}$ ([2]), то в условия теоремы 1 вводится добавочное ограничение

$p \neq q$. Поэтому, в частности, геометрический дифференциальный объект класса v при $n=1$ может не иметь комитантов второго класса, но в таком случае он имеет комитанты любого класса u, $2 < u \leqslant v$.

Соответственно изменяется теорема 3, именно: геометрический дифференциальный объект класса $v > 1$ при $n=1$ имеет не более, чем $\left[\frac{v+1}{2}\right]$ пропусков; эта оценка числа пропусков не может быть уменьшена. Отсюда сразу следует, что N-компонентный геометрический дифференциальный объект в X_1 имеет класс не выше чем $2N+1$ (см. ([5]; там же приведены примеры геометрических дифференциальных объектов в X_1 с максимальным числом пропусков). Так же изменяются и условия того, что система чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$ образует систему возможных пропусков, именно, для $n=1$ эти условия таковы: числа $p_i + p_k - 1$ при $i \neq k$ $(i, k = 1, \ldots, s)$ должны быть или больше v или встречаться среди чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$.

Поступило
25 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Вагнер, Приложение к книге Веблен и Уайтхед, Основания дифференциальной геометрии, 1949. [2] В. В. Вагнер, ДАН, 69, № 3 (1949). [3] В. В. Вагнер, ДАН, 46, № 9 (1945). [4] P. Medolaghi, Ann. di Matematica, ser. 2, 25, 179 (1897). [5] Ю. Е. Пензов, Матем. сборн., 26 (68) 2 (1950). [6] Ю. Е. Пензов, ДАН, 80, № 4 (1951).