Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 3

МАТЕМАТИКА

В. БОЛТЯНСКИЙ

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА МНОГООБРАЗИИ *

(Представлено академиком М. В. Келдышем 11 VII 1951)

Пусть M^n — замкнутое ориентированное и триангулированное риманово многообразие размерности n; его s-мерный остов будет обозначаться через K^s. Скажем, что на множестве $A \subset M^n$ задана система $\mathfrak{S}_k$ $(k \leqslant n)$, если в каждой точке $x \in A$ заданы k векторов риманова многообразия M^n, составляющих упорядоченную ортонормированную систему, непрерывно зависящую от x, причем при $k = n$ ориентация этой системы соответствует ориентации многообразия M^n. Положим $r = n - k$. В [1] даны условия возможности построения системы $\mathfrak{S}_k$ на K^{r+1}; в настоящей заметке даются условия возможности построения системы $\mathfrak{S}_k$ на K^{r+2}.

Обозначим через $V_{n,k}$ $(k < n)$ многообразие, составленное из всех упорядоченных ортонормированных систем k векторов n-мерного евклидова векторного пространства R^n. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в R^n; обозначим через Σ^r совокупность тех систем, входящих в $V_{n,k}$, первые $k-1$ векторов которых совпадают с $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$. Многообразие $V_{n,k}$ связно; его подмножество Σ^r гомеоморфно r-мерной сфере. Гомотопические группы [2] $\pi^s(V_{n,k})$ при $s < r$ тривиальны, а $G_1 = \pi^r(V_{n,k})$ является циклической группой. Символом α будет обозначаться элемент группы $G_2 = \pi^{r+1}(V_{n,k})$, определяемый таким отображением $(r+1)$-мерной сферы на Σ^r, которое при $r > 2$ негомотопно нулю в Σ^r [3], а при $r = 2$ имеет хопфовский инвариант [4] $+1$.

На K^r систему $\mathfrak{S}_k$ построить всегда возможно [1]. В самом деле, если на K^s система $\mathfrak{S}_k$ построена, то попытка распространения ее на $(s+1)$-мерный симплекс T^{s+1} многообразия M^n приводит к построению отображения границы этого симплекса в $V_{n,k}$; это отображение определяет элемент группы $\pi^s(V_{n,k})$, который ставится в соответствие симплексу T^{s+1}. Получается ∇-цикл $z^{s+1}(\mathfrak{S}_k)$ по области коэффициентов $\pi^s(V_{n,k})$ — п р е п я т с т в и е к распространению системы $\mathfrak{S}_k$ на K^{s+1}. Для возможности этого распространения необходимо и достаточно, чтобы было $z^{s+1}(\mathfrak{S}_k) = 0$.

Построив теперь систему $\mathfrak{S}_k$ на K^0 произвольно, мы сможем последовательно продолжить ее на $K^1, K^2, \ldots, K^r$ в силу связности $V_{n,k}$ и тривиальности групп $\pi^s(V_{n,k})$ (и, значит, циклов $z^{s+1}(\mathfrak{S}_k)$) для $s < r$. Таким образом, первое возможное нетривиальное препятствие есть цикл $z^{r+1}(\mathfrak{S}_k)$, называемый ∇-циклом Штифеля. Класс гомологий Y^{r+1} этого цикла является топологическим инвариантом многообразия M^n [5]. Равенство $Y^{r+1} = 0$ необходимо и достаточно для возможности построения системы $\mathfrak{S}_k$ на K^{r+1} [1].

---

* В настоящей заметке излагается основной результат моей кандидатской диссертации, выполненной под руководством Л. С. Понтрягина.

Для возможности построения системы $\mathfrak{S}_k$ на K^{r+2}, очевидно, необходимо, чтобы было $Y^{r+1}=0$. В дальнейшем это условие предполагается выполненным. Для каждой системы $\mathfrak{S}_k$, заданной на K^{r+1}, определен цикл $z^{r+2}(\mathfrak{S}_k)$ по группе G_2, который назовем **вторым препятствием** системы $\mathfrak{S}_k$. Класс гомологий этого цикла будет обозначаться символом $Z^{r+2}(\mathfrak{S}_k)$. На K^1 систему $\mathfrak{S}_k$ (заданную на K^{r+1}) можно дополнить до некоторой системы $\mathfrak{S}_n$. При попытке распространить систему $\mathfrak{S}_k$ в систему $\mathfrak{S}_n$ на K^2 возникает двумерный ∇-цикл (препятствие) по области коэффициентов $G_3=\pi^1(V_{r,\,r-1})$. Класс гомологий $\widetilde{Y}^2(\mathfrak{S}_k)$ этого цикла однозначно определяется выбранной системой $\mathfrak{S}_k$. Группа G_3 является циклической. При $r>2$ класс гомологий $\widetilde{Y}^2(\mathfrak{S}_k)$ совпадает с двумерным штифелевским инвариантом Y^2. Если теперь β_1, β_3 — образующие элементы групп G_1, G_3, взятых в аддитивной записи, то определим умножение элементов этих групп, положив:

$$(m\beta_1)\cdot(n\beta_1)=mn\cdot\alpha,\quad (m\beta_1)\cdot(n\beta_3)=mn\cdot\alpha.$$

При помощи этого умножения мы сможем определить стинродовский квадрат [6] Sq_{r-2}, определенный для элементов группы $\nabla^r(M^n,G_1)$, и произведение Колмогорова — Александера [7] $\cup$ для элементов групп $\nabla^r(M^n,G_1)$ и $\nabla^2(M^n,G_3)$.

Теорема. *Вторые препятствия систем $\mathfrak{S}_k$ полностью заполняют один или несколько классов $(r+2)$-мерных ∇-гомологий многообразия M^n по группе G_2. Все эти классы гомологий даются формулой:*

$$Z^{r+2}(\mathfrak{S}_k)=Z^{r+2}(\mathfrak{S}_k^0)+\widetilde{Y}^2(\mathfrak{S}_k^0)\cup D^r+Sq_{r-2}D^r, \tag{*}$$

где $\mathfrak{S}_k^0$ — произвольная фиксированная система (заданная на K^{r+1}), а D^r пробегает всю группу $\nabla^r(M^n,G_1)$.

При $r>2$ имеем $\widetilde{Y}^2(\mathfrak{S}_k^0)=Y^2$, и классы гомологий $Y^2\cup D^r+Sq_{r-2}D^r$ заполняют некоторую подгруппу H группы $\nabla^{r+2}(M^n,G_2)$, так что классы гомологий вторых препятствий заполняют некоторый смежный класс по подгруппе H.

Доказательство. Всякие две системы $\mathfrak{S}_k^0$, $\mathfrak{S}_k$ могут быть деформацией приведены к совпадению на K^{r-1} [1], после чего для них определяется различающая, которая является r-мерным ∇-циклом по группе G_1; класс гомологий этого цикла однозначно определен системами $\mathfrak{S}_k^0$, $\mathfrak{S}_k$ и будет обозначаться через $D^r(\mathfrak{S}_k^0,\mathfrak{S}_k)$. Если $D^r(\mathfrak{S}_k^0,\mathfrak{S}_k)=D^r(\mathfrak{S}_k^0,\mathfrak{S}_k')$, то $z^{r+2}(\mathfrak{S}_k)\underset{\nabla}{\sim}z^{r+2}(\mathfrak{S}_k')$. Взяв произвольный класс $D^r\in\nabla^r(M^n,G_1)$, мы построим на части остова K^{r+2}, содержащей остов K^{r+1}, систему $\mathfrak{S}_k$ специального вида, удовлетворяющую условию $D^r(\mathfrak{S}_k^0,\mathfrak{S}_k)=D^r$, и вычислим для нее препятствие $z^{r+2}(\mathfrak{S}_k)$. Тем самым доказательство теоремы будет проведено.

Введем в K^{r+2} барицентрические координаты. Пусть $З^2$ — двумерный остов дуального (звездного) подразделения комплекса K^{r+2}. Если T^{r+i} $(i=0,1,2)$ — произвольный $(r+i)$-мерный симплекс комплекса K^{r+2}, а a — точка $(2-i)$-мерной барицентрической звезды, дуальной симплексу T^{r+i}, то через T_a^{r+i} мы будем обозначать симплекс, получающийся из T^{r+i} гомотетией χ_a с центром a и коэффициентом $\varepsilon<1$. Теоретико-множественная сумма U_ε всех симплексов T_a^{r+i} $(i=0,1,2)$ является замыканием некоторой окрестности полиэдра $З^2$

в комплексе K^{r+2}. Сумму всех открытых симплексов T_a^{r+2} обозначим через V_ε. Выбрав в K^{r+2} определенный порядок вершин $x_1, x_2, \ldots, x_p$ и числа $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_p > 0$, построим новое звездное подразделение комплекса K^{r+2}, соответствующее распределению масс $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$. Обозначим через L^s s-мерный остов этого звездного комплекса. Тогда ([8]) комплексы L^r и $З^2$ имеют лишь изолированные общие точки — по одной внутри каждого симплекса T^{r+2}. Выберем ε настолько малым, чтобы пересечение $U_\varepsilon \cap L^r$ состояло из изолированных r-мерных симплексов, лежащих по одному внутри каждого симплекса $T^{r+2} \in K^{r+2}$.

Пусть теперь $\mathfrak{S}_k^0$ — фиксированная система, заданная на K^{r+1}, $k \leqslant n-2$. Систему $\mathfrak{S}_k^0$ мы непрерывно продолжим на $K^{r+2} \setminus L^0$. Продолженную так систему $\mathfrak{S}_k^0$ дополним до некоторой системы $\mathfrak{S}_n^0$ на $K^{r+2} \setminus L^r$. Пусть R_x^n — евклидово векторное пространство, касательное к риманову многообразию M^n в точке $x \in K^{r+2} \setminus L^r$, и φ_x — линейное отображение пространства R^n на пространство R_x^n, переводящее систему $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в систему $\mathfrak{S}_n^0$, взятую в точке x. Каждому непрерывному отображению f множества $A \subset K^{r+2}$ в многообразие $V_{n,k}$ отвечает на $A \setminus L^r$ определенная система $\mathfrak{S}_k$, заданная в точке $x \in A \setminus L^r$ как $\varphi_x [f(x)]$.

Пусть $d^r \in D^r \in \nabla^r(M^n, G_1)$ и g — непрерывное отображение остова K^{r+1} в $V_{n,k}$, переводящее весь остов K^{r-1} в точку $(e_1, e_2, \ldots, e_k) \in V_{n,k}$ и отображающее каждый симплекс T^r в сферу Σ^r со степенью $-d^r(T^r)$. Положим для точек x симплексов T_a^r и T_a^{r+1} $f(x) = g[\chi_a^{-1}(x)]$. Заданному так непрерывному отображению f множества $U_\varepsilon \setminus V_\varepsilon$ в $V_{n,k}$ отвечает система $\mathfrak{S}_k$, определенная на $U_\varepsilon \setminus (L^r \cup V_\varepsilon)$. На $K^{r+2} \setminus U_\varepsilon$ определим систему $\mathfrak{S}_k$ как совпадающую с $\mathfrak{S}_k^0$. Система $\mathfrak{S}$ определена теперь на $K^{r+2} \setminus [L^0 \cup (L^r \cap U_\varepsilon) \cup V_\varepsilon]$ и обладает тем свойством, что $D^r(\mathfrak{S}_k^0, \mathfrak{S}_k) = D^r$. Она не имеет особенностей на K^{r+1}, а в каждом симплексе T^{r+2} имеет особенности следующих трех типов: 1) одну особенность в μ — центре симплекса, вблизи которого $\mathfrak{S}_k$ совпадает с $\mathfrak{S}_k^0$, 2) особенности в точках симплекса $U_\varepsilon \cap L^r \cap T^{r+2}$, где система $\mathfrak{S}_k$ не определена, и 3) особенность на симплексе T_a^{r+2}. Каждой из этих особенностей соответствует ее «индекс» — элемент группы G_2. Обозначим эти индексы, соответственно, через $j_{\mathrm{I}}, j_{\mathrm{II}}, j_{\mathrm{III}}$. Коэффициент цикла $z^{r+2}(\mathfrak{S}_k)$ на симплексе T^{r+2} равен $j_{\mathrm{I}} + j_{\mathrm{II}} + j_{\mathrm{III}}$. Цепь с коэффициентами j_{I} совпадает с $z^{r+2}(\mathfrak{S}_k^0)$. Класс гомологий цикла с коэффициентами j_{II} вычисляется на основании работы Л. С. Понтрягина ([3]) или Фрейденталя ([9]) — это дает второй член правой части формулы (*). Класс гомологий цикла с коэффициентами j_{III} (третий член) вычисляется на основании работы М. М. Постникова ([10]).

Поступило
10 VII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Stiefel, Comm. Math. Helv., 8, 305 (1936). [2] В. А. Рохлин, Усп. матем. наук, 1, 5—6 (15—16), 175 (1946). [3] Л. С. Понтрягин, ДАН, 19, № 3, 147 (1938). [4] Л. С. Понтрягин, Матем. сборн., 9 (51), 2, 331 (1941). [5] R. Thom, C. R., 230, 5, 427 et 230, № 6, 507 (1950). [6] N. E. Steenrod, Ann. of Math., 48, 2, 290 (1947). [7] Дж. Александер, Усп. матем. наук, 2, 1 (17), 156 (1947). [8] М. Глезерман и Л. Понтрягин, там же, 2, 1 (17), 58 (1947); [9] H. Freudenthal, Compositio Math., 5, 299 (1937). [10] М. М. Постников, ДАН, 71, № 6 (1950).