Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXX, № 3

МАТЕМАТИКА

В. П. БАСОВ

О РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 12 VI 1951)

Рассмотрим следующую систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx_s}{dt} &= \frac{1}{t^\alpha}\sum_{\sigma=1}^{m} r_{s\sigma}x_\sigma + t^\beta \sum_{\sigma=m+1}^{n} r_{s\sigma}x_\sigma \quad (s=1,\ldots,m);\\ \frac{dx_s}{dt} &= \frac{1}{t^\alpha}\sum_{\sigma=1}^{m} r_{s\sigma}x_\sigma + t^\beta \sum_{\sigma=m+1}^{n} (p_{s\sigma}+q_{s\sigma})x_\sigma \quad (s=m+1,\ldots,n)\end{aligned} \tag{1}$$

в предположении, что $r_{s\sigma}$ и $q_{s\sigma}$ — непрерывные функции t, вещественные или комплексные, ограниченные по модулю при всех $t \geqslant T > 1$, причем $q_{s\sigma} \to 0$ при $t \to \infty$; $p_{s\sigma}$ — постоянные, такие, что уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{m+1,\,m+1} - \varkappa & \cdots & p_{m+1,\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n,\,m+1} & \cdots & p_{nn} - \varkappa \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни только с отличными от нуля вещественными частями; α и β — вещественные постоянные.

Теорема. *Если $\alpha > 1$, $\beta > -1$, то система* (1) *имеет m решений вида*

$$x_s = \delta_s^{(i)} + \frac{1}{t^{\alpha-1}}u_s^{(i)} \quad (s=1,\ldots,m);$$

$$x_s = \frac{1}{t^{\alpha+\beta}}u_s^{(i)} \quad (s=m+1,\ldots,n;\ i=1,\ldots,m),$$

в которых $u_s^{(i)}$ $(i=1,\ldots,m;\ s=1,\ldots,n)$ суть функции t, ограниченные по модулю при всех $t \geqslant T$, а $\delta_s^{(i)}$ равно 1 при $s=i$ и равно 0 при $s \neq i$.

Теорема доказывается методом последовательных приближений, построенным соответствующим образом, при этом определяется верхняя граница модуля функций $u_s^{(i)}$ при $t \geqslant t_0$, где t_0 — достаточно большое число, также определяемое в теореме.

Применим приведенную теорему к исследованию решений системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n}\left(p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\gamma}q_{s\sigma}\right)x_\sigma \quad (s=1,\ldots,n), \tag{2}$$

где γ и $p_{s\sigma}$ — вещественные постоянные, причем $\gamma > 0$, а $q_{s\sigma}$ — вещественные непрерывные функции t, ограниченные при всех $t \geqslant T$.

Мы установим вид решения системы (2) при больших значениях t, отвечающего всякому простому вещественному корню уравнения

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \varkappa \cdots p_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_{n1} \;\cdots\cdots p_{nn} - \varkappa \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

предполагая только, что вещественные части остальных корней уравнения (3) отличны от указанного корня.

Обозначим корни уравнения (3) через $\varkappa_s = \lambda_s + i\mu_s$ $(s = 1, \ldots, n)$ и допустим, например, что $\varkappa_1 = \lambda_1$ — простой вещественный корень, причем $\operatorname{Re}(\varkappa_s) \neq \lambda_1$ $(s = 2, \ldots, n)$. Тогда систему (2) с помощью неособенного линейного преобразования с постоянными коэффициентами всегда можно привести к виду

$$\begin{gathered} \frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 - x_1 + \frac{1}{t^\gamma} \sum_{\sigma=1}^{n} q_{1\sigma} x_\sigma; \\ \frac{dx_s}{dt} = \frac{1}{t^\gamma} q_{s1} x_1 + \sum_{\sigma=2}^{n} \left(p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\gamma} q_{s\sigma} \right) x_\sigma \quad (s = 2, \ldots, n), \end{gathered} \tag{4}$$

что в дальнейшем и будем предполагать выполненным.

Если $\gamma > 1$, то подстановкой $x_s = e^{\lambda_1 t} y_s$ $(s = 1, \ldots, n)$ система (4) приводится к виду, удовлетворяющему всем условиям теоремы, и мы без труда устанавливаем, что в этом случае система (4) имеет решение

$$x_1 = e^{\lambda_1 t} \left(1 + \frac{u_1}{t^{\gamma-1}} \right); \quad x_s = e^{\lambda_1 t} \frac{u_s}{t^\gamma} \quad (s = 2, \ldots, n),$$

в котором u_s $(s = 1, \ldots, n)$ — функции t, ограниченные при всех $t \geqslant T$.

Если $1/2 < \gamma \leqslant 1$, то подстановка

$$x_1 = \left[\exp \left(\lambda_1 t + \int_T^t \frac{1}{t^\gamma} q_{11}\, dt \right) \right] y_1;$$

$$x_s = \left[\exp \left(\lambda_1 t + \int_T^t \frac{1}{t^\gamma} q_{11}\, dt \right) \right] t^\gamma y_s \quad (s = 2, \ldots, n)$$

приводит систему (4) к виду

$$\begin{gathered} \frac{dy_1}{dt} = \sum_{\sigma=2}^{n} q_{1\sigma} y_\sigma; \\ \frac{dy_s}{dt} = \frac{1}{t^{2\gamma}} q_{s1} y_1 + \sum_{\sigma=2}^{n} \left(p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\gamma} q_{s\sigma} \right) y_s - \left(\lambda_1 + \frac{q_{11}}{t^\gamma} + \frac{\gamma}{t} \right) y_s \quad (s = 2, \ldots, n). \end{gathered} \tag{5}$$

Система (5) также удовлетворяет всем условиям теоремы (здесь $\alpha = 2\gamma > 1$, $\beta = 0$ и $m = 1$), следовательно, она имеет решение

$$y_1 = 1 + \frac{u_1}{t^{2\gamma-1}}, \quad y_s = \frac{u_s}{t^{2\gamma}} \quad (s = 2, \ldots, n),$$

а система (4), соответственно, имеет решение

$$x_1 = \left[\exp \left(\lambda_1 t + \int_T^t \frac{1}{t^\gamma} q_{11}\, dt \right) \right] \left(1 + \frac{u_1}{t^{2\gamma-1}} \right);$$

$$x_s = \left[\exp\left(\lambda_1 t + \int\limits_T^t \frac{1}{t^\gamma} q_{11}\, dt\right)\right] \frac{u_s}{t^\gamma} \quad (s = 2, \ldots, n),$$

где u_s $(s = 1, \ldots, n)$ — функции t такого же характера, как и раньше.

Если, наконец, $0 < \gamma \leqslant 1/2$ и k — целое положительное число такое, что

$$k\gamma \leqslant 1 < (k+1)\gamma,$$

то, полагая в системе (4)

$$x_1 = y_1, \quad x_s = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{a_s^{(l)}(t)}{t^{l\gamma}} y_1 + y_s \quad (s = 2, \ldots, n), \tag{6}$$

где y_s $(s = 1, \ldots, n)$ — новые неизвестные функции, можно соответствующим выбором ограниченных функций $a_s^{(l)}(t)$ систему (4) привести к виду

$$\begin{gathered} \frac{dy_1}{dt} = \left(\lambda + \frac{1}{t^\gamma} q_{11} + \frac{1}{t^\gamma} \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{\sigma=2}^{n} q_{1\sigma} \frac{a_\sigma^{(l)}(t)}{t^{l\gamma}}\right) y_1 + \frac{1}{t^\gamma} \sum_{\sigma=2}^{n} q_{1\sigma} y_\sigma, \\ \frac{dy_s}{dt} = \frac{1}{t^{k\gamma}} q_{s1}^* y_1 + \sum_{\sigma=2}^{n} \left(p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\gamma} q_{s\sigma}^*\right) y_\sigma \quad (s = 2, \ldots, n), \end{gathered} \tag{7}$$

где $q_{s\sigma}^*$ $(s = 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, \ldots, n)$ — функции t, ограниченные при всех $t \geqslant T$.

Подставляя (6) в (4) и требуя, чтобы преобразованная система имела вид (7), получим, что коэффициенты $a_s^{(l)}(t)$ преобразования (6) определяются последовательно, в порядке возрастания l, как ограниченные решения систем линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$\frac{da_s^{(l)}(t)}{dt} = \sum_{\sigma=2}^{n} p_{s\sigma} a_\sigma^{(l)} - \lambda_1 a_s^{(l)} + R_s^{(l)} \quad (s = 2, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, k-1), \tag{8}$$

в которых $R_s^{(l)}$ — известные целые рациональные функции коэффициентов q системы (4), а также тех $a_\sigma^{(i)}(t)$, для которых $i < l$. В частности, $R_s^{(1)} = q_{s1}$ $(s = 2, \ldots, n)$.

Теперь преобразованием переменных

$$y_1 = \left[\exp\left(\lambda_1 t + \int\limits_T^t \varphi(t)\, dt\right)\right] z_1; \quad y_s = \left[\exp\left(\lambda_1 t + \int\limits_T^t \varphi(t)\, dt\right)\right] t^\gamma z_s \,(s = 2, \ldots, n),$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{t^\gamma}\left(q_{11} + \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{\sigma=2}^{n} q_{1\sigma} \frac{a_\sigma^{(l)}(t)}{t^{l\gamma}}\right),$$

система (7) приводится к системе

$$\begin{gathered} \frac{dz_1}{dt} = \sum_{\sigma=2}^{n} q_{1\sigma} z_\sigma; \\ \frac{dz_s}{dt} = \frac{1}{t^{(k+1)\gamma}} q_{s1}^* z_1 + \sum_{\sigma=2}^{n} \left(p_{s\sigma} + \frac{1}{t^\gamma} q_{s\sigma}\right) z_\sigma - \left(\lambda_1 + \varphi(t) + \frac{\gamma}{t}\right) z_s \quad (s = 2, \ldots, n), \end{gathered} \tag{9}$$

которая удовлетворяет всем условиям теоремы (здесь $\alpha=(k+1)\gamma>1$, $\beta=0$, $m=1$) и, следовательно, имеет решение

$$z_1=1+\frac{u_1}{t^{(k+1)\gamma-1}};\quad z_s=\frac{\bar{u}_s}{t^{(k+1)\gamma}}\quad (s=2,\ldots,n),$$

где u_1 и $\bar{u}_s$ $(s=2,\ldots,n)$ — ограниченные функции t.

Соответственно, исходная система (4) имеет решение

$$x_1=\left[\exp\left(\lambda_1 t+\int_T^t\varphi(t)\,dt\right)\right]\left(1+\frac{u_1}{t^{(k+1)\gamma-1}}\right);$$

$$x_s=\left[\exp\left(\lambda_1 t+\int_T^t\varphi(t)\,dt\right)\right]\frac{a_s^{(1)}(t)+u_s}{t^{\gamma}}\quad (s=2,\ldots,n),$$

где u_s $(s=2,\ldots,n)$ — функции t, стремящиеся к нулю при $t\to\infty$. Изложенный метод дает возможность вне зависимости от канонической структуры матрицы $\|p_{s\sigma}\|$ установить вид стольких линейно независимых решений уравнений (2), сколько простых вещественных корней имеет уравнение (3), если только эти простые корни отличны по величине от вещественных частей остальных корней уравнения (3). В частности, если все корни уравнения (3) вещественные и простые, то мы таким образом сможем построить всю фундаментальную систему решений уравнений (2).

Приводя только результат, отметим, что если сделать дополнительные предположения относительно коэффициентов системы (2), именно, если предположить, что

$$q_{s\sigma}=\sum_{\varepsilon=1}^{k+1}\frac{1}{t^{(\varepsilon-1)\gamma}}q_{\sigma s}^{(\varepsilon)}\quad (s,\sigma=1,\ldots,n),$$

где $q_{s\sigma}^{(\varepsilon)}$ при $\varepsilon\leqslant k$ суть вещественные постоянные или вещественные периодические функции t одного и того же периода ω, $q_{s\sigma}^{(k+1)}$ — произвольные непрерывные функции t, ограниченные при всех $t\geqslant T$, k — целое положительное число такое, что

$$k\gamma\leqslant\nu<(k+1)\gamma,$$

где ν — наибольшая кратность корня уравнения (3), то для достаточно больших t удается построить вид всей фундаментальной системы решений уравнений (2) при любой канонической структуре матрицы $\|p_{s\sigma}\|$.

Результаты, полученные в настоящей работе, обобщают результаты работ В. В. Хорошилова (1), Гаханова и Л. И. Донской (2). Кроме того, они дают возможность изучить асимптотическое поведение решений для систем более общего вида, чем рассматривал Хорн в своих работах (3). Здесь же следует заметить, что настоящая работа является развитием идеи представления решений систем линейных дифференциальных уравнений в виде равномерно сходящихся рядов в окрестности существенно особой точки, высказанной в работе Н. П. Еругина (4).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
7 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Хорошилов, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., в. 19, 180 (1950); Прикладн. матем. и мех., **15**, в. 1 (1951). [2] Л. И. Донская, ДАН, **80** № 3 (1951). [3] J. Horn, Math. Zs., **44**, 481 (1938). [4] Н. П. Еругин, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **13** (1946).