Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 5

ФИЗИКА

Ф. И. ФЕДОРОВ

О МИНИМАЛЬНЫХ ПОЛИНОМАХ МАТРИЦ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. А. Фоком 16 VI 1951)

1. Как известно, общая теория релятивистских инвариантных волновых уравнений вида

$$(\gamma^k \nabla_k + i\varkappa)\psi = 0\,^*, \tag{1}$$

развитая в работе [1], обладает с физической точки зрения чрезмерной общностью в том смысле, что из нее вытекает неограниченное число уравнений, соответствующих всевозможным значениям спина и массы, между тем как число наблюдаемых на опыте частиц и разнообразие их свойств ограничено. Идеальным являлось бы положение, когда теория на основе общих физических требований естественным путем приводила бы к немногим основным уравнениям, столь же определенно выражающим свойства наблюдаемых частиц, как это имеет место, например, для уравнения Дирака в отношении электрона. Однако в настоящее время релятивистская теория элементарных частиц еще весьма далека от такого состояния. Поэтому большое значение приобретают все соображения, которые позволяют, исходя из требований физического характера, ограничить выбор возможных уравнений типа (1). В работе [2] Баба была сделана попытка собрать воедино все общие требования, которые могут быть в настоящее время положены в основу релятивистской теории элементарных частиц и, тем самым, создать «постулативный базис» этой теории. Однако в системе постулатов Баба отсутствует одно весьма важное условие, которое представляется нам совершенно необходимым с точки зрения современных взглядов на основные свойства физических частиц. Это условие гласит: с р е д и с о с т о я н и й, в о з м о ж н ы х д л я ч а с т и ц ы, д о л ж н ы о т с у т с т в о в а т ь т а к и е, к о т о р ы м с о о т в е т с т в у е т п л о т н о с т ь э н е р г и и (и п о л н а я э н е р г и я), р а в н а я н у л ю. Как показано в [1], это условие гарантирует вещественность собственных значений матрицы γ^0, а тем самым и вещественность массы частицы.

Целью настоящей работы является показать, что это условие позволяет также существенно ограничить вид минимальных полиномов матриц уравнений (1). Знание минимального полинома играет важнейшую роль для исследования свойств этих уравнений. Выражение для минимального полинома используется при квантовании уравнения (1), а также для получения нерелятивистского приближения и магнитного

* В уравнении (1) γ^k — квадратные матрицы, $\varkappa \neq 0$ — вещественная постоянная, $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x, y, z)$, ψ — волновая функция, имеющая конечное число компонент.

момента [3]. Вид минимального полинома в значительной мере определяет алгебру матриц γ^k [4,2]; он кладется также в основу классификации уравнений для различных типов частиц (см., например, (2)). Как показано автором [5], зная минимальный полином, можно сразу написать любое приближение теории возмущений для уравнения (1). В работе [2] на минимальный полином налагается лишь то ограничение, что ненулевые собственные значения λ должны входить в него только через посредство биномов $(\gamma^2-\lambda^2)$, причем все λ вещественны, а кратность их может быть произвольной. На самом же деле, как будет показано ниже, все ненулевые собственные значения в минимальном полиноме должны быть простыми. Для дальнейшего нам понадобятся некоторые вспомогательные предложения из линейной алгебры, к изложению которых мы и переходим.

2. Напишем общее выражение для минимального полинома произвольной матрицы γ

$$P(\gamma)=(\gamma-\lambda_1)^{n_1}(\gamma-\lambda_2)^{n_2}\ldots(\gamma-\lambda_k)^{n_k}\ldots(\gamma-\lambda_s)^{n_s}=$$
$$=(\gamma-\lambda_k)P_{\lambda_k}(\gamma)=0. \qquad (2)$$

Здесь λ_k — различные собственные значения матрицы. Очевидно, что столбцы матрицы $P_{\lambda_k}(\gamma)\neq 0$ являются решениями уравнения

$$\gamma\psi=\lambda_k\psi, \qquad (3)$$

т. е. они дают собственные векторы матрицы γ для собственного значения λ_k. Выясним, в каком случае среди столбцов $P_{\lambda_k}(\gamma)$ будут содержаться все независимые ψ, отвечающие собственному значению λ_k. Пусть γ приведена к нормальной жордановой форме, причем все жордановы клетки с одним и тем же λ_k объединены в одной субматрице c_k. Степень n_k бинома $(\gamma-\lambda_k)$ в минимальном полиноме $P(\gamma)$ будет равна порядку наибольшей жордановой клетки, входящей в c_k. Легко видеть, столбцы субматрицы $(c_k-\lambda_k)^{n_k-1}$ (дополненные нулями до порядка γ) дадут все собственные векторы матрицы γ, относящиеся к жордановым λ_k-клеткам максимального порядка n_k и только к ним; все остальные собственные векторы, отвечающие клеткам меньшего порядка, пропадут. Таким образом, можно высказать следующее предложение: *столбцы $P_{\lambda_k}(\gamma)$ будут содержать все независимые собственные векторы, отвечающие собственным значениям λ_k, в том и только в том случае, если в матрице γ, приведенной к нормальной форме, все жордановы клетки для λ_k будут иметь один и тот же порядок.* Необходимым (но не достаточным) условием для этого является, чтобы степень N_k бинома $(\gamma-\lambda_k)$ в характеристическом полиноме для γ была целым кратным соответствующей степени n_k в минимальном полиноме, т. е. $N_k=ln_k$, $l=1,2,\ldots,N_k$. При этом в крайних случаях $l=1$ и $l=N_k$ условие является достаточным.

Лемма. *Пусть A и γ — две квадратные матрицы одинакового порядка, причем $\overset{+}{\gamma}A=A\gamma$ ($\gamma_{ik}=\overset{*}{\gamma}_{ki}$, звездочка означает комплексное сопряжение). Пусть, далее, ψ_k, ψ_k' — любые собственные векторы матрицы γ, содержащиеся в $P_{\lambda_k}(\gamma)$, причем λ_k — кратный корень минимального полинома $P(\gamma)$. Тогда билинейная форма $\overset{*}{\psi}_kAQ\psi_k'$, где Q — произвольная матрица, коммутирующая с γ, равна нулю тождественно для всех ψ_k, ψ_k' в том числе одинаковых.*

Доказательство. Все произведения $\overset{*}{\psi}_kAQ\psi_k'$ содержатся среди элементов матрицы $\overset{+}{P}_{\lambda_k}(\gamma)AQP_{\lambda_k}(\gamma)=AQ[P_{\lambda_k}(\gamma)]^2$. Но в силу того, что λ_k — кратный корень минимального полинома, $[P_{\lambda_k}(\gamma)]^2=0$.

Имеет место и обратное предложение: если $\gamma^* A = A\gamma$, $|A| \neq 0$ и ψ_k, ψ_k^* — любые собственные векторы матрицы γ, содержащиеся в $P_{\lambda_k}(\gamma)$, причем для всех их $\psi_k^* A\psi_k = 0$, то λ_k — кратный корень минимального полинома $P(\gamma)$. Действительно, из условия вытекает, что $P_{\lambda_k}^*(\gamma)AP_{\lambda_k}(\gamma) = 0$. Отсюда $[P_{\lambda_k}(\gamma)]^2 = 0$, т. е. λ_k является кратным корнем минимального полинома.

3. Основную роль для уравнений (1) играет матрица γ^0. Как известно (см. [1]) она может быть представлена в виде

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} C^{k_0} \times E_{2k_0+1} & & & \\ & C^{k_0+1} \times E_{2k_0+3} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C^k \times E_{2k+1} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где C^k — квадратные ящики, относящиеся к спину k, E_{2k+1} — единичная матрица порядка $2k+1$, знак $\times$ обозначает прямое произведение в смысле Кронекера. Если частица обладает спинами $k_1, k_2, \ldots$ то лишь ящики C^{k_1}, $C^{k_2}, \ldots$ будут иметь отличные от нуля собственные значения, причем среди последних, наряду с каждым $\lambda \neq 0$, должно содержаться и $-\lambda$. Наличие спина k_i означает, как известно, что, при фиксированной массе для частицы возможны $2k_i + 1$ независимых состояний. Отвлекаясь от этих $2k_i + 1$ проекций спина, с которыми связаны матрицы E_{2k_i+1}, можно сказать, что ящик C^{k_i} должен иметь для каждого $\lambda \neq 0$ один и только один собственный вектор ψ. Это значит, что C^{k_i} может содержать только одну жорданову клетку с данным $\lambda \neq 0$, т. е. будет выполнено установленное в п. 2 условие, достаточное для того, чтобы $P_\lambda(C^{k_i})$ содержал все собственные векторы, отвечающие данному λ. При этом, если λ будет кратным корнем минимального полинома для C^{k_i}, то, по доказанной выше лемме, при любой матрице A, для которой $\gamma^{0*} A = A\gamma^0$, должно быть $\psi^* A\psi = 0$ и $\psi^* A\gamma^0\psi = 0$. Но в таком случае энергия и заряд частицы в соответствующем состоянии обратятся в нуль [1]. Поэтому для того, чтобы уравнение (1) имело физический смысл и могло описывать реальные частицы, необходимо, чтобы в каждом отдельном ящике C^{k_i} матрицы γ^0 каждое $\lambda \neq 0$ было простым корнем минимального полинома для C^{k_i}. Но в таком случае λ будет простым корнем и минимального полинома для всей γ^0. Учитывая еще двойной знак при всех $\lambda \neq 0$, получим, что минимальный полином матрицы γ^0 (а значит, и всех γ^k, см. [4,2]) для уравнения (1), описывающего частицы с отличными от нуля энергией и зарядом, должен иметь следующий вид

$$P(\gamma) = \gamma^n(\gamma^2 - \lambda_1^2)(\gamma^2 - \lambda_2^2)\ldots(\gamma^2 - \lambda_s^2) = 0, \tag{5}$$

где все λ_k вещественны и различны между собой, а n может быть любым целым положительным числом, включая нуль. Показатель n может иметь одно и то же значение для различных спинов (например, $n = 1$ для спинов 0 и 1, $n = 3$ для спинов $^3/_2$ и 2 [6,7]), вместе с тем для одного и того же спина n может принимать различные значения (например, для спина $^3/_2$ может быть $n = 2$ и $n = 3$, см. [1,6]).

Изложенные здесь соображения приобретают, как нам кажется некоторый специальный интерес в связи с недавней попыткой Баба [8] построить новую теорию ядерных сил, основное и единственное отличие которой от прежних теорий заключается в том, что поле, посредством которого осуществляется взаимодействие нуклонов, удовлетворяет волновому уравнению четвертого порядка

$$(\Box + \varkappa)^2 \psi = 0. \tag{6}$$

Но в таком случае ([2], [7]) минимальный полином для матрицы γ° соответствующего уравнения (1) должен иметь вид

$$(\gamma^{\circ 2} - 1)^2 \gamma^{\circ n} = 0, \tag{7}$$

т. е., по доказанному выше, энергия и заряд ассоциированных с этим полем частиц должны тождественно равняться нулю. Хотя, используя поле (7), Баба удалось добиться устранения некоторых расходимостей, характерных для существующих теорий ядерных сил, однако в рамках существующих физических представлений трудно понять, каким образом взаимодействие нуклонов может осуществляться через посредство поля, лишенного энергии.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
23 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд и А. М. Яглом, ЖЭТФ, **18**, 703 (1948). [2] H. J. Bhabha, Rev. Mod. Phys., **21**, 451 (1949). [3] Harish-Chandra, Proc. Roy. Soc., **192A**, 195 (1948). [4] Harish-Chandra, Phys. Rev., **71**, 793 (1947). [5] Ф. И. Федоров, ДАН, **65**, 813 (1949). [6] Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ, **20**, 27 (1950). [7] Ф. И. Федоров, Уч. зап. БГУ, сер. физ.-мат., **12**, 141 (1951). [8] H. J. Bhabha, Phys. Rev. **77**, 665 (1950).