Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 5

ГИДРАВЛИКА

Ю. Д. СОКОЛОВ

О РАСЧЕТЕ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗ КАНАЛА ТРАПЕЦОИДАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 26 V 1951)

Задача о фильтрации без подпора из незакольматированного канала трапецоидального сечения в однородном грунте при бесконечной глубине залегания дренирующего слоя была решена В. В. Ведерниковым ([1], [2]).

В случае конечной глубины (T) залегания дренирующего слоя характеристическая функция имеет вид *:

$$z = -\frac{i}{\varkappa}\int_0^w dw \int_0^{\frac{1}{\lambda^2}\,\mathrm{sn}^2\frac{2ikw}{Q}} \xi^{-\alpha-1/2}(\xi-1)^{\alpha-1}\,d\xi + \frac{\mathrm{tg}\,\alpha\pi - i}{\varkappa}\,w + \frac{B}{2} \tag{1}$$

$$\left(A = \frac{\Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha)}\right),$$

где z — комплексная координата точки в плоскости течения, w — комплексный потенциал, $\varkappa$ — коэффициент фильтрации, Q — расход на фильтрацию на единицу длины канала, B — ширина зеркала воды в нем, $\alpha\pi$ — угол заложения откоса, $\lambda = \sin\vartheta$ — постоянная и K — полный эллиптический интеграл 1-го рода.

Уравнение кривой депрессии можно представить в виде:

$$\frac{B}{2} + y_1\,\mathrm{tg}\,\alpha\pi - x = \frac{4AK\lambda}{Q_s}\int_0^{y_1} \frac{(y_1-\eta)\,dn'\,\frac{2K\eta}{Q_s}}{\mathrm{sn}'\,\frac{2\alpha 2K\eta}{Q_s}\left(1-\lambda_1^2\,\mathrm{cn}'\,\frac{2K\eta}{Q_s}\right)^{1-\alpha}}\,d\eta \tag{2}$$

$$\left(y_1 = -y, \quad \lambda_1 = \cos\vartheta, \quad Q_s = \frac{Q}{\varkappa}\right),$$

где штрихами отмечены эллиптические функции, соответствующие дополнительному модулю k'.

Пусть H — глубина воды в канале, $H' = T - H$, b — ширина канала понизу, Q_s' — приведенный расход через оба откоса, a — абсцисса точки пересечения кривой депрессии с линией раздела грунтов.

Введем обозначения:

$$\beta = \frac{b\sin\alpha\pi}{2H}, \quad \gamma = \frac{\alpha H}{AT\sin\alpha\pi}, \quad p = b + \frac{2H}{\sin\alpha\pi}, \tag{3}$$

---

* Вследствие симметрии рассматриваем половину области течения, соответствующую положительным абсциссам.

$$f = \frac{\alpha}{{}^1/_2 - \alpha}\int\limits_0^1 \frac{F(\tau_1)}{\sqrt{\dfrac{1}{1+t^{^1/_2-\alpha}}}}\,dt + \int\limits_0^1 \frac{F(\tau_2)}{\sqrt{1+t^{1/\alpha}}}\,dt, \tag{4}$$

$$g_1 = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-\lambda_1^2\,t^{1/\alpha}}}, \quad g_2 = \int\limits_0^1 \frac{F(\tau_3)}{\sqrt{1-\lambda_1^2\,t^{1/\alpha}}}\,dt, \quad g_3 = \int\limits_0^1 \frac{K - F(\arcsin t)}{(1-k^2\lambda^2 t^2)^{1-\alpha}}\,dt,$$

где

$$\sin\tau_1 = \lambda\sqrt{\frac{\dfrac{1}{t^{^1/_2-\alpha}}}{1+\dfrac{1}{t^{^1/_2-\alpha}}}}, \quad \sin\tau_2 = \frac{\lambda}{\sqrt{1+t^{1/\alpha}}}, \quad \sin\tau_3 = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda_1^2\,t^{1/\alpha}}}, \tag{4'}$$

а $F(\tau)$ — неполный эллиптический интеграл 1-го рода. Для определения модуля k и параметра λ получим систему уравнений:

$$\lambda_1^{2\alpha}(Kg_1 - g_2) = \beta f, \quad f = \gamma K', \tag{А}$$

комбинация которых дает:

$$\frac{K'}{K} = \frac{g_1 f}{\gamma\left(g_2 + \dfrac{\beta}{\lambda_1^{2\alpha}} f\right)}. \tag{Б}$$

После решения этой системы искомые параметры определяются по формулам:

$$Q_s = 2T\frac{K}{K'} = 2T\gamma\,\frac{g_2 + \dfrac{\beta}{\lambda_1^{2\alpha}} f}{g_1 f}, \tag{В}$$

$$Q_s' = Q_s\frac{F(\vartheta)}{K}, \quad a = \frac{Q_s}{2}\left(1 - \frac{2Ak\lambda}{K} g_3\right). \tag{Г}$$

Положив $f - F(\vartheta) = \delta$, по второму из уравнений (А) найдем

$$F(\vartheta) = f - \delta = \gamma K' - \delta, \quad \lambda = \sin\vartheta = \operatorname{sn}(\gamma K^1 - \delta). \tag{А'}$$

Для приближенного решения системы (А) можно применить следующий метод. Полагая, в зависимости от значения $p\,/\,H'$, k^2 равным 0, $^1/_2$ или 1, определяем λ_0 по одной из формул:

$$\lambda_0 = \frac{1}{1 + A\dfrac{b}{H}} \quad \text{или} \quad \lambda_0 = \sin\frac{\pi}{2(\beta+1)} \quad \text{(в первом случае)}, \tag{a$_1$}$$

$$\lambda_0 = \operatorname{sn}(K_0\gamma;\, {}^1/_2) \quad \left(K_0 = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}[\Gamma({}^1/_4)]^2 = 1{,}854...\right) \text{(во втором случае)}, \tag{a$_2$}$$

$$\lambda_0 = \operatorname{th}\frac{\pi}{2}\gamma \quad \text{(в третьем случае)}. \tag{a$_3$}$$

Полагая, далее, в первом приближении

$$\delta = 0, \quad \frac{g_2}{f} = 1, \quad g_1 = 1, \tag{5}$$

находим по (Б):

$$\log q_1 = -\frac{\pi\log e}{\gamma\left(1 + \dfrac{\beta}{\lambda_{10}^{2\alpha}}\right)} \quad \left(\lambda_{10} = +\sqrt{1-\lambda_0^2}\right), \tag{6}$$

и, следовательно, соответствующий модулярный угол θ_1. Тогда, по (В)

$$Q_{s1} = 2T\frac{K_1}{K_1'} = 2\gamma T\left(1 + \frac{\beta}{\lambda_{10}^{2\alpha}}\right). \qquad (\text{в})$$

При $\delta = 0$ расход через откосы представится по (Г) независимым от T по формуле:

$$Q_{s1}' = \frac{2\alpha}{A}c = \frac{2\alpha H}{\sin \alpha\pi}. \qquad (\text{г})$$

Применяя метод к 10 случаям табл. 1*, получим погрешности приведенные в табл. 2 (знак + указывает на приближение с избытком знак — с недостатком).

Таблица 1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	0,2	0,2	0,2	0,15	0,15	0,15	0,15	0,1	0,1	0,1
θ	37°	60°	77°	27°	55°	51°	45°	89°30′	89°	89°55′
ϑ	16°30′	18°	27°30′	30°	45°	53°	61°	75°	81°54′	83°34′
T в м	30	30	20	20	20	25	20	20	20	20
H	2,18	2,82	3,09	1,84	3,74	5,39	4,72	6,48	8,04	8,59
B	43,7	63,8	57,1	23,7	35,0	39,5	28,0	109,0	90,9	125,0
Q_s	52,76	76,75	72,96	29,65	47	55,04	40	156	138,4	201,7
Q_s'	8,71	11,32	12,53	9,42	19,47	28,41	25,13	51,62	67,33	73,37

Таблица 2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
θ_1	42°14′	64°45′	79°1′	28°3′	55°17′	50°24′	43°2′	89°13′	88°14′	89°48′
Погр. λ в % . .	1,0—	1,3—	3,0+	0,8—	7,0+	3,6+	0,6—	1,3—	0,9—	0,8—
Погр. Q_s в % . .	8,8+	8,9+	6,0+	1,9+	0,5+	1,1—	3,1—	5,6—	10,4—	10,8—
Погр. Q_s' в % . .	9,0+	6,0+	5,1+	3,0+	1,0+	0,2—	1,2—	8,0—	12,4—	14,2—

Для получения второго приближения, пользуясь значениями $\lambda \approx \lambda_0$ и $\theta \approx \theta_1$, вычисляем f, g_1, g_2 и по (Б) находим $\log q_2$ и, следовательно, θ_2. Вычислив затем $\delta = f - F(\vartheta_0, \theta_2)$, определяем значение λ во втором приближении по (А′)

$$\lambda \approx \lambda_2 = \operatorname{sn}(\gamma K_2' - \delta). \qquad (\text{а}')$$

Расход Q_{s2} определяется по (в) при $\lambda_1 = +\sqrt{1 - \lambda_2^2}$, а расход через откосы

$$Q_{s2}' = 2T\frac{F(\vartheta_2, \theta_2)}{K_2'}. \qquad (\text{г}')$$

Во втором приближении погрешности для λ не превышают 0,2% для Q_s 2,8% и для Q_s 0,5% (4% в случае 10).

* Эти случаи выбраны применительно к предварительным вариантам, предложенным для расчета Укрводпроектом.

При малых значениях λ формулы первого приближения (б) — (г) не дают достаточно удовлетворительных результатов. В этом случае (а также при малых значениях k^2) лучше вместо (в), (г) пользоваться формулами:

$$Q_{s1} = \frac{b + \frac{2H}{\pi}(D - 2\ln\lambda)}{1 - A\lambda}, \quad Q'_{s1} = 2T\frac{F(\vartheta_0, \theta_1)}{K'_1}, \tag{в$_1$}$$

где

$$D = \frac{1}{\alpha} - \overline{\psi}(\alpha) + D_1, \tag{6}$$

$$D_1 = 2(1 + \ln 2) - \pi - C = -0{,}33251 \quad \text{при } k^2 \approx 0,$$

$$D_1 = 2 + 3\ln 2 - 2K_0 - C = -0{,}20591 \quad \text{при } k^2 \approx {}^1/_2,$$

$$D_1 = 2(1 - \ln 2) - C = +0{,}03649 \quad \text{при } k^2 \approx 1,$$

$\overline{\psi}(\alpha) = \frac{d \ln \Gamma(\alpha + 1)}{d\alpha}$, а C — постоянная Эйлера; при этом для обычных откосов и $k^2 \approx 0$ можно положить $D \approx 1/\alpha$.

В случаях 1—4 формулы (в$_1$) дают погрешности, соответственно: 0,6; 0,8; 0,2; 0,0% для Q_s и 0,7; 1,1; 3,5; 0,9% для Q'_s.

При $k^2 = 0$ ($T = \infty$) в 16 случаях трапецоидального и треугольного русла, табулированных в книге В. В. Ведерникова, формула (в$_1$) для Q_s дает погрешности, не превышающие 0,8%.

Можно указать простейшую приближенную формулу

$$Q_s \approx \frac{\alpha}{A} p, \tag{7}$$

дающую в этих случаях погрешности, не превышающие 9,4%

В случае $k^2 \approx 1$, $\lambda \approx 1$ лучшие результаты в первом приближении получим, определяя λ_0 из уравнения

$$\lambda_{10}^{2\alpha} = \frac{\alpha H'}{AT}, \tag{α}$$

а Q_{s1} по формуле

$$Q_{s1} = \frac{T}{H'}\left[b + \frac{4H'}{\pi}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{β}$$

аналогичной формуле, предложенной В. В. Ведерниковым ([2]) для случая больших значений b и малых T:

$$Q_{s1} = \frac{T}{H'}\left[b + H' \operatorname{ctg} \alpha\pi \ln \frac{T}{H'}\right]. \tag{8}$$

Погрешности для Q_s, даваемые формулой (β) для случаев 1—3, 8—10 табл. 1 соответственно равны: 1,9; 3,8; 3,2; 1,4; 1,3; 1,0%; формула же (8) в этих случаях дает погрешности: 17; 19; 15; 19; 27 и 20%.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
14 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Ведерников, Фильтрация из каналов, 1934. [2] В. В. Ведерников, Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа, 1939.