Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 5

ГИДРАВЛИКА

Н. А. СЛЕЗКИН

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ФИЛЬТРАЦИИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 16 VI 1951)

При составлении дифференциальных уравнений движения жидкости в пористой среде обычно предполагается, что эта среда является неподвижной, а пористость ее постоянна. Уравнения фильтрации жидкости с учетом того, что пористость среды может изменяться с изменением давления, впервые были установлены В. Н. Щелкачевым (1). Но легко себе представить случай, когда интенсивность фильтрации на отдельных участках может оказаться настолько большой, что под ее воздействием будут происходить не только деформация пористой среды, но и перемещения отдельных частиц среды на заметные расстояния. Это последнее обстоятельство будет, очевидно, приводить к местному размыву грунта. Поскольку проблема предотвращения или, по крайней мере, уменьшения возможности размыва грунта под действием фильтрации является теперь одной из важных проблем, постольку возникает необходимость привлечения к решению этой проблемы некоторой теории, связанной с математическими расчетами. В данной заметке мы делаем попытку нового вывода известных уравнений движения жидкости в пористой среде, позволяющую подойти к проблеме деформаций грунта под действием потока фильтрации.

Рассмотрим движение смеси, состоящей из очень мало деформируемых частиц пористой среды и сильно диформируемых частиц жидкости. Выделим параллелепипед с ребрами Δx_1, Δx_2 и Δx_3 и с вершиной в точке O с координатами x_1, x_2 и x_3. Отношение части общего объема параллелепипеда, занимаемой жидкостью, ко всему объему его называется пористостью среды; эту величину обозначим через m. Проведем через O элементарную площадку с нормалью n. Отношение той части площадки, которая занята частицами жидкости, к величине всей площадки назовем просветом и обозначим через s_n. Величины m и s_n будут зависеть от геометрической формы зерен пористой среды и их взаимного расположения. Отношение массы всех частиц жидкости к занимаемому ими малому объему назовем плотностью жидкости $\rho_ж$. Аналогично определяем и плотность пористой среды. Вектор скорости частиц жидкости обозначим через $\mathbf{U}$, а вектор скорости частиц пористой среды через $\mathbf{V}$.

Для вывода уравнений движения смеси воспользуемся уравнениями переноса примерно так, как это сделано в нашей заметке (2).

За промежуток времени Δt в фиксированном параллелепипеде произойдет:
изменение общей массы на величину

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_ж m + \rho_с (1-m)\right] \Delta t\, \Delta x_1\, \Delta x_2\, \Delta x_3; \tag{1}$$

изменение вектора общего количества движения на величину

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_ж m \mathbf{U} + \rho_с (1-m)\mathbf{V}\right] \Delta t\, \Delta x_1\, \Delta x_2\, \Delta x_3; \tag{2}$$

изменение полной энергии на величину

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_ж m\left(\frac{U^2}{2} + \varepsilon_ж\right) + \rho_с (1-m)\left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon_с\right)\right] \Delta t\, \Delta x_1\, \Delta x_2\, \Delta x_3, \tag{3}$$

где $\varepsilon_ж$ и $\varepsilon_с$ суть внутренние энергии единиц соответственных масс.

Через грань параллелепипеда, перпендикулярную к координатной линии x_1, за промежуток времени Δt во внутрь параллелепипеда будет внесено:

общей массы

$$\left[\rho_ж s_1 U_1 + \rho_с (1-s_1) V_1\right]_{x_1} \Delta t\, \Delta x_2\, \Delta x_3; \tag{4}$$

общего количества движения

$$\left[\rho_ж s_1 U_1 \mathbf{U} + \rho_с (1-s_1) V_1 \mathbf{V}\right]_{x_1} \Delta t\, \Delta x_2\, \Delta x_3; \tag{5}$$

общей полной энергии вследствие конвективного переноса

$$\left[\rho_ж s_1 U_1\left(\frac{U^2}{2} + \varepsilon_ж\right) + \rho_с (1-s_1) V_1\left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon_с\right)\right]_{x_1} \Delta t\, \Delta x_2\, \Delta x_3; \tag{6}$$

тепловой энергии вследствие теплопроводности

$$-\frac{1}{A}\left[\varkappa_ж s_1 \frac{\partial T_ж}{\partial x_1} + \varkappa_с (1-s_1)\frac{\partial T_с}{\partial x_1}\right]_{x_1} \Delta t\, \Delta x_2\, \Delta x_3, \tag{7}$$

где $T_с$ и $T_ж$ суть температуры частиц среды и жидкости.

Элементарный импульс и элементарная работа сил напряжений, распределенных по всей рассматриваемой грани, будут представляться в виде

$$-\left[\mathbf{p}_{1ж} s_1 + \mathbf{p}_{1с}(1-s_1)\right]_{x_1} \Delta t\, \Delta x_2\, \Delta x_3, \tag{8}$$

$$-\left[\mathbf{p}_{1ж} \cdot \mathbf{U} s_1 + \mathbf{p}_{1с} \cdot \mathbf{V}(1-s_1)\right]_{x_1} \Delta t\, \Delta x_2\, \Delta x_3, \tag{9}$$

где $\mathbf{p}_{1ж}$, $\mathbf{p}_{1с}$ суть векторы напряжений, отнесенные, соответственно, к частицам жидкости и среды.

Рассматривая противоположную грань, мы получим те же выражения (4) — 9), но со значком $x_1 + \Delta x_1$ внизу. Составляя разность соответственных выражений, мы получим соответственные изменения общей массы, общего количества движения и общей энергии внутри параллелепипеда. Аналогичные рассуждения можно провести и по двум парам остальных граней. Просуммируем эти изменения общей массы, количества движения и энергии, а также изменения количества движения и энергии за счет действия массовых сил, и результаты суммирования приравняем, соответственно, выражениям (1), (2) и (3). После разделения полученных равенств на произведение $\Delta t\, \Delta x_1\, \Delta x_2\, \Delta x_3$ перейдем к пределу, уменьшая все размеры параллелепипеда до весьма малой величины. В результате мы получим следующие дифференциальные уравнения переноса рассматриваемой смеси:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_ж m + \rho_с (1-m)\right] + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\rho_ж s_i U_i + \rho_с (1-s_i) V_i\right] = 0; \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho_{ж} m\mathbf{U}+\rho_{с}(1-m)\mathbf{V}]=\mathbf{F}[\rho_{ж} m+\rho_{с}(1-m)]+$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}[\mathbf{p}_{iж}s_i+\mathbf{p}_{iс}(1-s_i)-\rho_{ж}s_iU_i\mathbf{U}-\rho_{с}(1-s_i)V_i\mathbf{V}]; \qquad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_{ж} m\left(\frac{U^2}{2}+\varepsilon_{ж}\right)+\rho_{с}(1-m)\left(\frac{V^2}{2}+\varepsilon_{с}\right)\right]=\mathbf{F}\cdot[\rho_{ж} m\mathbf{U}+\rho_{с}(1-m)\mathbf{V}]+$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\mathbf{p}_{iж}s_i\cdot\mathbf{U}+\mathbf{p}_{iс}\cdot(1-s_i)\mathbf{V}-\rho_{ж}s_iU_i\left(\frac{U^2}{2}+\varepsilon_{ж}\right)-\right.$$
$$\left.-\rho_{с}(1-s_i)V_i\left(\frac{V^2}{2}+\varepsilon_{с}\right)+\frac{1}{A}\left[\varkappa_{ж}s_i\frac{\partial T_{ж}}{\partial x_i}+\varkappa_{с}(1-s_i)\frac{\partial T_{с}}{\partial x_i}\right]\right\}. \qquad (12)$$

Дифференциальные уравнения (10), (11) и (12) пригодны и для такой двухкомпонентной смеси, в которой могут происходить какие-либо внутренние процессы преобразования масс и внутренних энергий обеих компонент.

В рассматриваемом нами случае движения жидкости в подвижной пористой среде превращения массы одной компоненты в массу второй компоненты не происходит; масса каждой из этих компонент внутри фиксированного элементарного объема может изменяться лишь за счет хода и выхода самой же массы этой компоненты через границы. По этой причине уравнение изменения общей массы (10) будет распадаться на два независимых уравнения изменения массы каждой компоненты, которые представляются в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_{ж})+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}[\rho_{ж}s_iU_i]=0;$$
$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho_{с}(1-m)]+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}[\rho_{с}(1-s_i)V_i]=0. \qquad (13)$$

Учитывая соотношения (13), уравнение изменения количеств движения (11) можно представить в виде

$$m\rho_{ж}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}+(1-m)\rho_{с}\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\left[\rho_{ж}s_iU_i\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x_i}+\rho_{с}(1-s_i)V_i\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x_i}\right]=$$
$$=\mathbf{F}\cdot[m\rho_{ж}+(1-m)\rho_{с}]+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}[\mathbf{p}_{iж}s_i+\mathbf{p}_{iс}(1-s_i)]. \qquad (14)$$

Таким образом, необходимыми уравнениями движения механической смеси должны служить уравнения (13) и (14).

Чтобы от случая подвижной пористой среды перейти к случаю неподвижной пористой среды, необходимо в уравнениях (13) и (14) положить скорость $\mathbf{V}$ равной нулю и, кроме того, присоединить к этим уравнениям уравнения равновесия самой пористой среды. При составлении уравнений равновесия пористой среды мы должны учесть не только массовую силу $\mathbf{F}(1-m)\rho_{с}$ и вектор напряжения $(1-s_i)\mathbf{p}_{iс}$, но и вектор $\mathbf{R}$ результирующего воздействия жидкости, проникающей через поры среды. Эти уравнения равновесия пористой среды представятся в виде

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}[(1-s_i)\mathbf{p}_{iс}]+\mathbf{F}(1-m)\rho_{с}+\mathbf{R}=0. \qquad (15)$$

Учитывая уравнения (15), дифференциальные уравнения движения жидкости в неподвижной пористой среде можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_{ж}) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}[\rho_{ж} s_i U_i] = 0;$$

$$m\rho_{ж}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \rho_{ж} s_i U_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \mathbf{F} m\rho_{ж} - \mathbf{R} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(s_i \mathbf{p}_{iж}). \tag{16}$$

При переходе к фиктивным скоростям первое уравнение (16) будет совпадать с уравнением неразрывности (1.1), приведенным в книге Л. С. Лейбензона [3], что же касается второго уравнения (16), то оно будет совпадать с уравнениями (4.2) той же книги, если пренебречь всеми инерционными членами в левой части и положить

$$\mathbf{R} = m\frac{\mu}{k}\mathbf{U}, \quad s_i \mathbf{p}_i = -mp(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \tag{17}$$

где p есть давление.

Таким образом, для решения задач о деформациях грунта под действием потока фильтрации необходимо использовать уравнения равновесия (15), в которых вектор $\mathbf{R}$ играет роль объемной силы, зависящей от положения рассматриваемых частиц грунта. Этот вектор как вектор-функция координат будет известен из (17), если предварительно будет решена задача о фильтрации на основании уже известных уравнений.

Заметим, что если в уравнениях (10), (11) и (12) положить $\rho_c = 0$, то получим дифференциальные уравнения движения дискретной среды

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_{ж}) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_{ж} s_i U_i) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_{ж}\mathbf{U}) = \mathbf{F} m\rho_{ж} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}[\mathbf{p}_{iж} s_i - \rho_{ж} s_i U_i \mathbf{U}],$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[m\rho_{ж}\left(\frac{U^2}{2} + \varepsilon_{ж}\right)\right] = \tag{18}$$

$$= \mathbf{F} m\rho_{ж}\mathbf{U} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mathbf{p}_{iж} s_i \mathbf{U} - \rho_{ж} s_i U_i\left(\frac{U^2}{2} + \varepsilon_{ж}\right) + \frac{1}{A}\varkappa_{ж} s_i \frac{\partial T_{ж}}{\partial x_i}\right].$$

Дифференциальные уравнения (18) перейдут в хорошо известные уравнения движения сплошной среды в пространстве (y_1, y_2, y_3), если положить $s_i = \text{const}$; $m = \text{const}$; $x_i = \frac{s_i}{m} y_i$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Н. Щелкачев, ДАН, 52, № 2 (1946). [2] Н. А. Слезкин, ДАН, 77, № 2 (1951). [3] Л. С. Лейбензон, Движение природных жидкостей и газов в пористой среде, М., 1947.