

В. Н. ЩЕЛКАЧЕВ

**ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ
О ДВИЖЕНИИ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГОМ ПЛАСТЕ**

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 9 VI 1951)

Исследуем неустановившееся плоско-радиальное движение однородной упругой жидкости по линейному закону фильтрации к гидродинамически совершенной скважине в упругом пласте бесконечно большой протяженности. Режим пласта упруго-водонапорный. Предполагается, что скважина пущена в эксплуатацию с постоянным объемным дебитом Q . Вокруг скважины A_c радиуса R_c (см. рис. 1) имеется кольцевая зона I с внешним радиусом R , внутри которой пласт имеет пористость m_1 , проницаемость k_1 , коэффициент пьезопроводности a_1^2 , коэффициент упругости β_1^* . Во всем остальном пласте (в зоне II) соответствующие величины имеют значения $m_2, k_2, a_2^2, \beta_2^*$, т. е. в условиях задачи учитывается различие в физико-геологических характеристиках пласта вблизи и вдали от скважины.

Требуется определить давление $p(r, t)$ в любой момент времени t (после пуска скважины) в любой точке M пласта, удаленной на расстояние r от центра O скважины, если в начальный момент давление во всех точках одинаково и равно p_0 . Математически задача формулируется следующим образом ⁽¹⁾: требуется решить дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial r} = \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad R_c \leq r \leq R, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_2}{\partial r} = \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial p_2}{\partial t}, \quad r \geq R, \quad t > 0 \quad (2)$$

при соблюдении таких начальных и граничных условий:

$$p_1(r, 0) = p_2(r, 0); \quad p_1(R, t) = p_2(R, t); \\ k_1 \frac{\partial p_1(R, t)}{\partial r} = k_2 \frac{\partial p_2(R, t)}{\partial r}; \quad p_2(\infty, t) = p_0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial p_1(R_c, t)}{\partial r} = \frac{Q\mu}{2\pi R_c h k_1} = \text{const} \equiv D,$$

где μ — динамическая вязкость жидкости, b — мощность пласта, p_1 и p_2 — пластовые давления в зонах I и II .

Для решения сформулированной задачи воспользуемся функциональным преобразованием Лапласа ^(2, 3)

$$L[p(r, t)] \equiv P(r, s) = \int_0^{\infty} p(r, t) e^{-st} dt, \quad (4)$$

причем $P(r, s)$, есть „лапласово изображение“ функции (оригинала) $p(r, t)$. Преобразование Лапласа (4) сводит задачу интегрирования уравнений (1) и (2) к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых, учитывающие начальное условие, имеют вид:

$$P_1(r, s) = A_1 J_0 \left(\frac{\sqrt{s}}{a_1} r \right) + B_1 K_0 \left(\frac{\sqrt{s}}{a_1} r \right) + \frac{p_0}{s}, \quad (5)$$

$$P_2(r, s) = A_2 J_0 \left(\frac{\sqrt{s}}{a_2} r \right) + B_2 K_0 \left(\frac{\sqrt{s}}{a_2} r \right) + \frac{p_0}{s}, \quad (6)$$

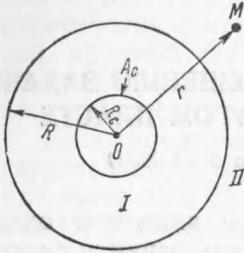


Рис. 1

где J_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода. Четыре произвольных постоянных A_1, B_1, A_2, B_2 определяются из четырех граничных условий (см. последние четыре равенства (3)), которые предварительно подвергаются преобразованию Лапласа. Допустим, что $k_1 = k_2 = k$, $a_1 = a_2 = a$, т. е. предположим, что пласт однороден. Тогда граничные условия упрощаются и равенства (5) и (6) примут вид:

$$P_1(r, s) = P_2(r, s) = - \frac{Da}{s\sqrt{s}} \frac{K_0 \left(\frac{\sqrt{s}}{a} r \right)}{K_1 \left(\frac{\sqrt{s}}{a} R_c \right)} + \frac{p_0}{s}. \quad (7)$$

Для перехода от изображения к оригиналу рассмотрим два крайних случая.

Первый случай. При больших значениях s (т. е. при малых значениях x времени t) можно воспользоваться асимптотическими представлениями функций J_0, K_0, J_1, K_1 и в этих представлениях ограничиться лишь первыми членами. Тогда вместо (5) и (6) получим:

$$P_1(r, s) \approx - \frac{Da_1}{s\sqrt{s}} \sqrt{\frac{R_c}{r}} \frac{\varepsilon e^{-2(R-r-R_c)\sqrt{s}/a_1} + e^{-(r-R_c)\sqrt{s}/a_1}}{1 - \varepsilon e^{-2(R-R_c)\sqrt{s}/a_1}} + \frac{p_0}{s}, \quad (8)$$

$$P_2(r, s) \approx - \frac{Da_1(1 + \varepsilon)}{s\sqrt{s}} \sqrt{\frac{R_c}{r}} \frac{e^{-(r-R)\sqrt{s}/a_2} - (R-R_c)\sqrt{s}/a_1}{1 - \varepsilon e^{-2(R-R_c)\sqrt{s}/a_1}} + \frac{p_0}{s}, \quad (9)$$

где

$$\varepsilon = \frac{k_1 a_2 - k_2 a_1}{k_1 a_2 + k_2 a_1}, \quad |\varepsilon| < 1. \quad (10)$$

Преобразуя формулы (8) и (9) с помощью равенства

$$\frac{1}{1 - \varepsilon e^{-2(R-R_c)\sqrt{s}/a_1}} = \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^{v-1} e^{-2(v-1)(R-R_c)\sqrt{s}/a_1} \quad (11)$$

и используя таблицы (3) для перехода от L -изображений к оригиналам, получим:

$$p_1(r, t) = 2Da_1 \sqrt{\frac{R_c}{r}} \left\{ \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\xi^2/t} - \xi \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi}{\sqrt{t}} \right) + \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v \left[\sqrt{\frac{t}{\pi}} (e^{-\xi_1^2/t} + e^{-\xi_2^2/t}) - \xi_1 \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi_1}{\sqrt{t}} \right) - \xi_2 \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi_2}{\sqrt{t}} \right) \right] \right\} + p_0, \quad (12)$$

$$p_2(r, t) = -2Da_1(1 + \varepsilon) \sqrt{\frac{R_c}{r}} \left\{ \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\xi_3^2/t} - \xi_3 \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_3}{\sqrt{t}}\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \left[\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\xi_4^2/t} - \xi_4 \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_4}{\sqrt{t}}\right) \right] \right\} + p_0, \quad (13)$$

где $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$, причем $\operatorname{erf}(x)$ есть интеграл вероятностей; кроме того,

$$\xi = \frac{r - R_c}{2a_1}, \quad \xi_1 = \frac{2\nu(R - R_c) + (r - R_c)}{2a_1}, \quad \xi_2 = \frac{2\nu(R - R_c) - (r - R_c)}{2a_1}, \quad (14)$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{R - R_c}{a_1} + \frac{r - R}{a_2} \right), \quad \xi_4 = \frac{1}{2} \left[(2\nu + 1) \frac{R - R_c}{a_1} + \frac{r - R}{a_2} \right].$$

Полагая в (12) $r = R_c$, найдем давление $p_c(t)$ на стенке скважины:

$$p_c(t) = p_0 - \frac{Q\mu a_1}{\pi R_c b k_1} \left\{ \sqrt{\frac{t}{\pi}} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \left[\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\nu^2(R - R_c)^2/a_1^2 t} - \frac{\nu(R - R_c)}{a_1} \operatorname{erfc} \frac{\nu(R - R_c)}{a_1 \sqrt{t}} \right] \right\}. \quad (15)$$

В условиях однородного пласта, судя по равенству (10), $\varepsilon = 0$, и потому равенства (8) — (15) могут быть переписаны в следующем упрощенном виде:

$$P_1(r, s) = P_2(r, s) \approx -\frac{Da}{s\sqrt{V}} \sqrt{\frac{R_c}{r}} e^{-(r - R_c)\sqrt{s}/a} + \frac{p_0}{s}, \quad (16)$$

$$p_1(r, t) = p_2(r, t) = -Da \sqrt{\frac{R_c}{r}} \left[2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-(r - R_c)^2/4a^2 t} - \left(\frac{r - R_c}{a} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{r - R_c}{2a\sqrt{t}} \right) \right] + p_0, \quad (17)$$

$$p_c(t) = p_0 - \frac{Q\mu a}{\pi R_c b k} \sqrt{\frac{t}{\pi}}. \quad (18)$$

Для уточнения результатов, выводимых из формулы (7), удержим в асимптотическом представлении функций K_0 и K_1 не по одному члену, а столько, чтобы в правой части приближенного равенства (16) получить следующий член порядка s^{-2} . В таком случае формулы (17) и (18) заменяются более точными, хотя и более сложными формулами. Так например,

$$p_c(t) = p_0 - \frac{Q\mu}{2\pi b k} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{a^2 t}{R_c^2}} - \frac{1}{2} \frac{a^2 t}{R_c^2} \right]. \quad (19)$$

Второй случай. При малых значениях s (т. е. при больших значениях времени t) можно воспользоваться разложением функций J_0 , K_0 , J_1 , K_1 в ряды и ограничиться лишь первыми членами рядов.

Тогда вместо (5) и (6) получим:

$$P_1(r, s) = \frac{DR_c}{s} \left[\frac{k_1}{k_2} \left(C + \ln \frac{RVs}{2a_2} \right) - \ln \frac{R}{r} \right] + \frac{p_0}{s}, \quad (20)$$

$$P_2(r, s) = \frac{DR_c k_1}{k_2 s} \left[C + \ln \frac{rVs}{2a_2} \right] + \frac{p_0}{s}, \quad (21)$$

причем постоянная Эйлера $C \cong 0,5772$. Пользуясь таблицами операционного исчисления⁽³⁾, найдем искомые оригиналы p_1 и p_2 , соответствующие L -изображениям P_1 и P_2 , определяемым равенствами (20) и (21):

$$p_1(r, t) = p_0 - DR_c \left[\ln \frac{R}{r} - \frac{k_1}{k_2} \left(\frac{1}{2} C + \ln \frac{R}{2a_2 \sqrt{t}} \right) \right], \quad (22)$$

$$p_2(r, t) = p_0 - DR_c \frac{k_1}{k_2} \left(\ln \frac{2a_2 \sqrt{t}}{r} - \frac{1}{2} C \right). \quad (23)$$

В условиях однородного пласта формулы (20) — (23) и формула для давления p_c на стенке скважины примут вид:

$$P_1(r, s) = P_2(r, s) = \frac{DR_c}{s} \left(C + \ln \frac{rVs}{2a} \right) + \frac{p_0}{s}, \quad (24)$$

$$p_1(r, t) = p_2(r, t) = p_0 - DR_c \left(\ln \frac{2a\sqrt{t}}{r} - \frac{1}{2} C \right), \quad (25)$$

$$p_c(t) = p_0 - \frac{Qu}{4\pi bk} \left(\ln \frac{4a^2 t}{R_c^2} - C \right). \quad (26)$$

В статье⁽⁴⁾ американских авторов выведены формулы (18) и (26), но они получаются при весьма частных предположениях (при $r = R_c$ и только в условиях однородного пласта) из выведенных нами формул (12) и (22).

Сравнение рассмотренного здесь решения с решением задачи методом численного интегрирования⁽⁴⁾ позволяет утверждать, что использование выведенной нами приближенной формулы (19) гарантирует точность подсчетов до 1% при $\tau \leq 0,05$ и точность до 10% при $\tau \leq 0,4$, где τ — видоизмененный параметр Фурье⁽¹⁾, равный $a^2 t / R_c^2$. Использование приближенной формулы (26) гарантирует точность подсчетов до 1% при $\tau \geq 100$ и точность до 10% при $\tau \geq 6$.

Итак, выведенные здесь формулы не позволяют (при условии, чтобы погрешность не превосходила 10%) подсчитывать давление на стенке скважины в диапазоне $0,4 < \tau < 6$. Вывод простой формулы для подсчетов давления в упомянутом диапазоне изменения величины τ , а также точная оценка границы применимости более общих выведенных здесь формул являются предметом специального исследования.

Согласно известной термо-гидродинамической аналогии можно считать, что найденное решение исследуемой задачи теории фильтрации одновременно является решением родственной задачи теории теплопроводности.

Поступило
8 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Н. Шелкачев, Упругий режим пластовых водонапорных систем, М., 1948.
² Х. Карслоу и Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, М., 1948. ³ А. В. Лыков, Теплопроводность нестационарных процессов, М., 1948.
⁴ A. F. Everdigen and W. Hurst, Journ. Petroleum Technology, December, 1, No. 12 (1949).