Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 5

ГИДРОМЕХАНИКА

Е. А. КРАСИЛЬЩИКОВА

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ НА НЕСУЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ*

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 11 VI 1951)

Рассмотрим задачу об обтекании тонкого слабо изогнутого крыла конечного размаха, движущегося прямолинейно-поступательно с постоянной скоростью $u > a$ (где a — скорость звука в невозмущенном потоке) в линеалированной постановке (1).

Пользуясь полученными нами ранее решениями задачи (2,3), найдем распределение давления на поверхности крыла.

На рис. 1 и 2 дано крыло произвольной формы в плане. Пусть в характеристических координатах (2) уравнение дуги E_1E передней кромки крыла задано в виде $y = \psi_1(x)$; уравнение концевых кромок крыла ED и E_1D_1, соответственно, в виде $y = \psi(x)$ и $y = \psi_2(x)$; уравнение задних кромок крыла DT и D_1T_1 — в виде $y = \chi(x)$ и $y = \chi_2(x)$.

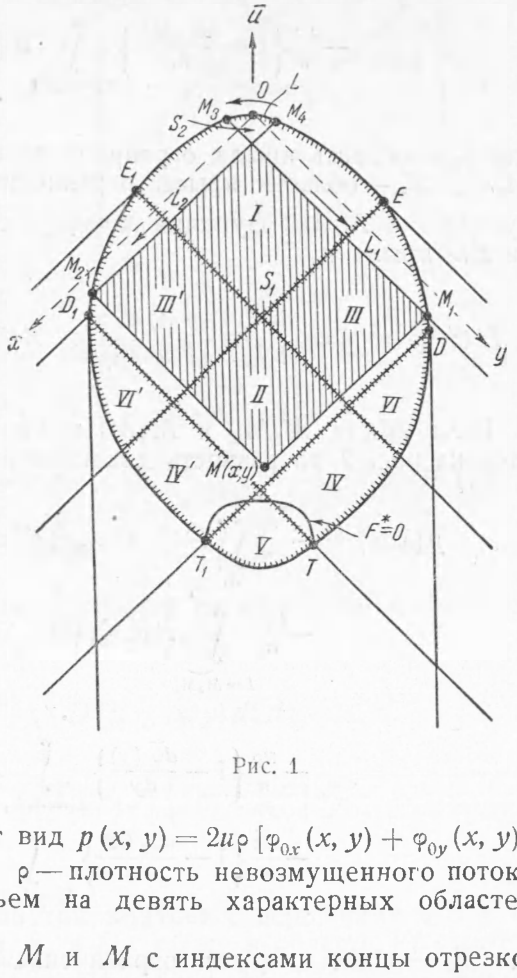

Рис. 1

Выразим давление на поверхности крыла через заданную на крыле функцию $A(x,y) = -u\beta_0(x,y)/\sqrt{u^2/a^2-1}$, где β_0 — уголок атаки элементов крыла.

Из интеграла Бернулли разность давлений снизу и сверху крыла $p_н(x, y) - p_в(x,y) = p(x, y)$ в характеристических координатах имеет вид $p(x, y) = 2u\rho[\varphi_{0x}(x, y) + \varphi_{0y}(x, y)]$, где φ_0 — потенциал скорости, ρ — плотность невозмущенного потока.

Поверхность крыла разобьем на девять характерных областей, как указано на рисунках.

Будем обозначать буквами M и M с индексами концы отрезков прямых, параллельных осям координат и лежащих в плоскости xy.

* Доложено в Институте механики АН СССР 4 X 1948 г.

Ясно, что названные отрезки принадлежат линиям пересечения характеристических конусов волнового уравнения с вершинами в плоскости xy с самой плоскостью xy.

Область I — это область, где концевой эффект не сказывается. Эта область крыла лежит вне характеристических конусов с вершинами в точках E_1 и E.

Область II — это область, где сказывается концевой эффект, но не сказывается влияние вихревой системы за крылом. Эта область лежит внутри конусов с вершинами в точках E_1 и E и вне конусов с вершинами D_1 и D. В точке $M(x, y)$ области II, для которой линии M_1M_3 и M_2M_4 пересекаются на крыле, как указано на рис. 1, разность давлений выражается формулой

$$p(x, y) = -\frac{u\rho}{\pi}\iint\limits_{S} D(\xi, \eta;\ x, y)\, d\xi\, d\eta + \frac{u\rho}{\pi}\iint\limits_{S_2} D(\xi, \eta;\ x, y)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+\frac{u\rho}{\pi}\int\limits_{L=\overset{\frown}{M_4M_3}} B[\xi, \psi_1(\xi);\ x, y]\left\{1-\frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi}\right\} d\xi -$$

$$-\frac{u\rho}{\pi}\left\{1-\frac{d\overline{\psi}(y)}{dy}\right\}\int\limits_{L_1=M_3M_4} B[\overline{\psi}(y), \eta;\ x, y]\, d\eta -$$

$$-\frac{u\rho}{\pi}\left\{1-\frac{d\psi_2(x)}{dx}\right\}\int\limits_{L_2=M_4M_3} B[\xi, \psi_2(x);\ x, y]\, d\xi, \qquad (1)$$

где S_1 — область крыла, ограниченная прямыми MM_1, MM_3, M_1M_3 и M_2M_4; S_2 — область крыла, ограниченная прямыми M_1M_3, M_2M_4 и дугой $L = \overset{\frown}{M_4M_3}$; функция $x = \overline{\psi}(y)$ есть уравнение концевой кромки ED крыла и

$$D(\xi, \eta;\ x, y) = \frac{A_\xi(\xi, \eta) + A_\eta(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)\ (y-\eta)}}\ ; \quad B(\xi, \eta;\ x, y) = \frac{A(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)\ (y-\eta)}}.$$

Если линии M_1M_3 и M_2M_4 не пересекаются на крыле, что указано на рис. 2, то разность давлений выражается формулой

$$p(x, y) = -\frac{u\rho}{\pi}\iint\limits_{S_1} D(\xi, \eta;\ x, y)\, d\xi\, d\eta -$$

$$-\frac{u\rho}{\pi}\int\limits_{L=\overset{\frown}{M_3M_4}} B[\xi, \psi_1(\xi);\ x, y]\left\{1-\frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi}\right\} d\xi -$$

$$-\frac{u\rho}{\pi}\left\{1-\frac{d\overline{\psi}(y)}{dy}\right\}\int\limits_{L_1=M_3M_1} B[\overline{\psi}(y), \eta;\ x, y]\, d\eta -$$

$$-\frac{u\rho}{\pi}\left\{1-\frac{d\psi_2(x)}{dx}\right\}\int\limits_{L_2=M_4M_2} B[\xi, \psi_2(x);\ x, y]\, d\xi, \qquad (2)$$

где S_1 — область крыла, ограниченная прямыми MM_1, M_1M_3, MM_2, M_2M_4 и дугой $L = \overset{\frown}{M_3M_4}$. На рисунках стрелками указаны направления интегрирования в контурных интегралах.

В области III — области крыла, лежащей внутри характеристического конуса с вершиной в точке E и вне конусов с вершинами в E_1, D и D_1, разность давлений следует вычислять по формуле (2), положив в ней последний член равным нулю. Разность давлений в области III выразится также формулой (2), если положить в ней предпоследний член равным нулю.

Область IV — это область крыла, лежащая внутри конусов с вершинами в E_1, E и D и вне конуса с вершиной в D_1. Соответственно определяется область IV'. В точке $M(x, y)$ области IV, для которой линии M_1M_3 и M_2M_4 пересекаются на крыле, разность давлений выражается формулой (1), если положить в ней предпоследний член равным нулю. В точке M, для которой линии M_1M_3 и M_2M_4 не пересекаются на крыле, разность давлений выражается формулой (2), если положить в ней также предпоследний член равным нулю. Аналогично выражается разность давлений для точек области IV' по формулам (1) и (2), если положить в них последний член равным нулю.

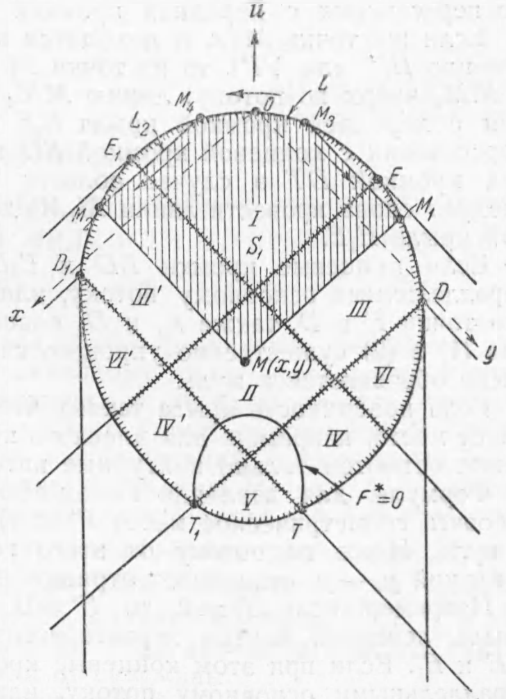

Рис. 2

В области V, лежащей внутри характеристических конусов с вершинами в E, E_1, D и D_1, разность давлений выражается формулой

$$p(x, y) = -\frac{u\rho}{\pi}\iint\limits_{S_1} D(\xi, \eta;\ x, y)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+\frac{u\rho}{\pi}\iint\limits_{S_2} D(\xi, \eta;\ x, y)\, d\xi\, d\eta + \frac{u\rho}{\pi}\int\limits_{L=\overset{\frown}{M_4M_3}} B[\xi, \psi_1(\xi);\ x, y]\left\{1-\frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi}\right\}d\xi, \quad (3)$$

если прямые M_1M_3 и M_2M_4 пересекаются на крыле, и, если эти прямые не пересекаются на крыле, то формулой

$$p(x, y) = -\frac{u\rho}{\pi}\iint\limits_{S_1} D(\xi, \eta;\ x, y)\, d\xi\, d\eta -$$

$$-\frac{u\rho}{\pi}\int\limits_{L=\overset{\frown}{M_4M_3}} B[\xi, \psi_1(\xi);\ x, y]\left\{1-\frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi}\right\}d\xi. \quad (4)$$

В области VI, лежащей внутри конусов с вершинами в E и D и вне конусов с вершинами в E_1 и D_1, также в области VI' разность давлений выражается формулой (4). Такой же вид имеет формула для давления в области I. Итак, если точка $M(x, y)$, в которой ищется давление, находится в одной из областей II (как указано на рисунке),

IV (соответственно IV') или V, то для того, чтобы установить область и контур интегрирования в формулах для давления, необходимо поступить следующим образом: из точки M провести две прямые MM_1 и MM_2 вверх по потоку до пересечения с концевыми или задними кромками крыла. Из точек пересечения M_1 и M_2 следует провести снова вверх по потоку крыла прямые M_1M_3 и M_2M_4 до пересечения с передней кромкой крыла E_1E в точках M_3 и M_4.

Если же точка $M(x, y)$ находится в области III или VI (соответственно III' или VI'), то из точки M следует провести линии MM_4 и MM_1 вверх по потоку; линию MM_4 непосредственно до пересечения с передней кромкой крыла E_1E в точке M_4; линию MM_1 — до пересечения с концевой кромкой ED в случае области III или с задней кромкой DT в случае области VI. Из точки пересечения M_1 следует снова провести линии M_1M_3 до пересечения с передней кромкой крыла E_1E.

Если концевые кромки ED и E_1D_1 крыла являются прямыми, параллельными основному потоку, или форма крыла в плане такова, что точки E и D, также E_1 и D_1 совпадают, то формулы для давления (1) и (2) существенно упрощаются, так как в них последние два члена обращаются в нуль.

Если поверхность крыла такова, что функция $D(\xi, \eta;\ x, y) \equiv 0$ (это имеет место, например, для плоского крыла), то в формулах для давления остаются только контурные интегралы.

Формулы для давления показывают, что на крыле может существовать геометрическое место $F^*(x, y) = 0$, где давление обращается в нуль. Ниже по потоку от этого геометрического места разность давлений $p_н - p_в$ становится отрицательной.

Например, если $D \equiv 0$, то $F^* = 0$ будет находиться в области крыла, лежащей внутри характеристических конусов с вершинами в E и E_1. Если при этом концевые кромки крыла являются прямыми, параллельными основному потоку, или точки E и D совпадают, то уравнение $F^*(x, y) = 0$ принимает простой вид $F^* = \overline{\psi}_1[\psi_2(x)] - \overline{\psi}(y) = 0$ в области VI; $F^* = \overline{\psi}_1[\psi_2(x) - \overline{\chi}(y)] = 0$ в области IV и $F^* = \overline{\psi}_1[\chi_2(x)] - \overline{\chi}(y) = 0$ в области V, где $x = \overline{\psi}_1(y)$ и $x = \chi(y)$ — уравнения соответственно, дуги E_1E и DT в виде, разрешенном относительно координаты x.

Во всех тех случаях, когда разность давлений на крыле, согласно формулам (1) — (4), выражается посредством только криволинейного интеграла, распространенного по дуге $\overset{\frown}{M_3M_4}$ контура крыла, кривая $F^* = 0$ может быть легко построена геометрическим путем, имея в виду, что кривая нулевого давления — это есть геометрическое место таких точек $M(x, y)$ на поверхности крыла, для которых точки M_3 и M_4 на контуре крыла совпадают, т. е. дуга L стягивается в точку.

Результаты обобщаются и для случая, когда передняя кромка крыла E_1E задана не одним уравнением $y = \psi_1(x)$, а состоит из отрезков гладких кривых, заданных уравнениями $y = \psi_{1k}(x)$, где $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$. В этом случае в формулах для давления поверхностные и контурные интегралы при фактическом вычислении их следует разбить на соответствующие части. Такое же замечание относится к концевым и задним кромкам крыла.

Поступило
26 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Седов, Теория плоских движений идеальной жидкости, 1939. [2] Е. А. Красильщикова, ДАН, 58, № 4 (1947). [3] Е. А. Красильщикова, ДАН, 58, № 6 (1947).